

การวิเคราะห์เชิงเรขาคณิตและการหาค่าเหมาะที่สุดของเส้นโค้งตระกูลไฮโปโทรคอยด์
ในงานวิศวกรรมการผลิต

Geometric Analysis and Optimal Arc Length Evaluation of Hypotrochoid Curves
for Manufacturing Engineering Applications

พชร สัตยพันธ์ ศิริกร แสงรัตน์

นงลักษณ์ อรรถกาญจน์ จาลิณี อ้นเย็ก

¹โรงเรียนวิทยาศาสตร์จุฬารามราชวิทยาลัย ตราง อำเภอมืองตราง จังหวัดตราง 92000

Email: 07042@pcshstrg.ac.th

บทคัดย่อ

โครงการวิศวกรรมประยุกต์นี้มุ่งแก้ปัญหาข้อจำกัดของซอฟต์แวร์ CAD/CAM และระบบควบคุม CNC ที่ประเมินความยาวเส้นโค้งไฮโปโทรคอยด์ด้วยวิธีหอย่อยเส้นตรงซึ่งมีความซับซ้อนของเวลาแบบ $O(n)$ ทำให้กินทรัพยากรหน่วยประมวลผลสูง คณะผู้จัดทำจึงได้พัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์รูปแบบปิด โดยบูรณาการทฤษฎีจำนวน (ตัวคูณร่วมน้อย) เข้ากับการประมาณค่าวงรีของรามานุจัน จนได้สมการพหุนามที่สามารถประมวลผลเสร็จสิ้นในขั้นตอนเดียวด้วยความซับซ้อน $O(1)$

จากการทดสอบพารามิเตอร์ 3,000 รูปแบบ เพื่อเปรียบเทียบสมรรถนะกับระบบ CAD พบว่าสมการของโครงการให้ผลลัพธ์ที่เหนือกว่า ในกรณีกลไกข้อต่อแนวตรงและหุ่นยนต์ ($\lambda = 1$) สมการลดรูปเป็นสมการแม่นยำตรงที่ปราศจากความคลาดเคลื่อน (Error 0.0000%) แก้ปัญหาการคำนวณพิกัดเพี้ยนบริเวณจุดหักมุม (Cusps) ได้อย่างเด็ดขาด ส่วนกรณีงานกัดโลหะ CNC ($\lambda < 1$) และการออกแบบโปรไฟล์ลูกเบี้ยว ($\lambda > 1$) สมการรักษาความแม่นยำได้ในระดับ 0.0000002% ถึง 0.06% ซึ่งเทียบเท่าหรือดีกว่าซอฟต์แวร์ระดับอุตสาหกรรม

สรุปได้ว่า สมการรูปแบบปิดที่พัฒนาขึ้น ช่วยลดภาระของหน่วยประมวลผลระบบควบคุมได้เกือบ 100% (Zero CPU Overload) อีกทั้งยังสามารถนำไปประยุกต์เป็น "ดัชนีคัดกรองความสามารถในการผลิต" เชิงตัวเลข เพื่อแจ้งเตือนปรากฏการณ์การตัดขวิด ในชิ้นส่วนกลไกได้ล่วงหน้า นำไปสู่การลดต้นทุนและยกระดับประสิทธิภาพอุตสาหกรรมการผลิตอัตโนมัติได้อย่างเป็นรูปธรรม

คำสำคัญ: ไฮโปโทรคอยด์ (Hypotrochoid), ความยาวส่วนโค้ง (Arc Length), สมการพารามิเตอร์ (Parametric Equation), เส้นโค้งปิด (Closed Curves), ปริพันธ์วงรี (Elliptic Integrals)

1. บทนำ

ในอุตสาหกรรมการผลิตขั้นสูง การควบคุมเรขาคณิตของเส้นทางเดินเครื่องมือกลและข้อต่อกลศาสตร์ให้มีความแม่นยำสูงถือเป็นปัจจัยวิกฤต โดยเฉพาะอย่างยิ่งการประยุกต์ใช้เส้นโค้งตระกูลไฮโปโทรคอยด์ซึ่งจำแนกตามความสัมพันธ์ของระยะจุดวาด (d) และรัศมีวงกลมย่อย (r) ได้ 3 รูปแบบหลัก คือ ไฮโปไซคลอยด์ (Hypocycloid: $d = r$), เคอร์เทไฮโปโทรคอยด์ (Curtate Hypotrochoid: $d < r$) และโปรเลตไฮโปโทรคอยด์ (Prolate Hypotrochoid: $d > r$) เส้นโค้งเหล่านี้มีความสำคัญอย่างยิ่งต่อกระบวนการกัด

โลหะด้วยความเร็วสูง (High-Speed CNC Machining) การวางแผนเส้นทางของแขนกลหุ่นยนต์ (Robotics Path Planning) และการออกแบบโปรไฟล์แผ่นลูกเบี้ยว (Cam Profile Design) โดยพารามิเตอร์ "ความยาวส่วนโค้งรวม" (L) ของเส้นโค้งปิดเป็นตัวแปรต้นที่ระบบควบคุมต้องนำไปคำนวณเพื่อประเมินเวลารอบการผลิต (Cycle Time) และคาดการณ์อัตราการใช้หรือของเครื่องมือตัดเหมือนข้อจำกัดเชิงระบบประมวลผลดั้งเดิม อย่างไรก็ตาม การหาค่าความยาวส่วนโค้งรวมด้วยระเบียบวิธีเชิงปริพันธ์ในกรณีทั่วไป ไม่

มีผลเฉลยในรูปแบบปิด (Closed-form solution) เนื่องจากโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ติดอยู่ในรูปของปริพันธ์รีที่ซับซ้อน ซอฟต์แวร์ CAD/CAM และหน่วยประมวลผล CNC ในปัจจุบันจึงต้องพึ่งพาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขด้วยการขอย่อยเส้นโค้งเป็นส่วนของเส้นตรงจำนวนมาก (Tessellation) ซึ่งมีความซับซ้อนของเวลาประมวลผลสูงถึง $O(n)$ ยิ่งต้องการความแม่นยำสูง ระบบยังต้องเพิ่มจำนวนการสับเส้นตรง ส่งผลให้เกิดภาวะสิ้นเปลืองทรัพยากรหน่วยประมวลผล เกิดการหน่วงของระบบ และไม่สามารถคำนวณเพื่อปรับเปลี่ยนอัตราการป้อนแบบเรียลไทม์ได้อย่างมีประสิทธิภาพเพื่อแก้ไขข้อจำกัดดังกล่าว งานวิจัยนี้จึงนำเสนอการพัฒนา แบบจำลองทางคณิตศาสตร์รูปแบบสำหรับคำนวณความยาวส่วนโค้งรวมของเส้นโค้งตระกูลไฮโปโทรคอยด์ โดยบูรณาการตัวคูณร่วมน้อย (LCM) ในการประเมินความเป็นคาบและการบรรจบปิดลูปของเส้นโค้ง ร่วมกับการแปลงพจน์แคลคูลัสให้อยู่ในฟอร์มมาตรฐานของปริพันธ์รีสมบูรณ์ชนิดที่ 2 แล้วทำการประมาณค่าเชิงพีชคณิตด้วยสูตรข้อที่ 1 ของรามานุจัน เพื่อลดความซับซ้อนเชิงคำนวณให้เหลือเพียง $O(1)$

2. วิธีการดำเนินงาน

2.1 การสร้างสมการพารามетริกและความยาวส่วนโค้งทั่วไป

สร้างสมการพารามетริกพิกัด x และ y จากพารามетริก R, r, d แล้วหาอนุพันธ์เพื่อตั้งสมการปริพันธ์ความยาวเส้นโค้งภายใต้เครื่องหมายรากที่สอง

2.2 การพิสูจน์ความสม่ำเสมอของระยะทางแต่ละคาบ

ใช้คุณสมบัติความเป็นคาบ (Periodicity) ทุก 2π เรเดียนของฟังก์ชันตรีโกณมิติ พิสูจน์ว่าความยาวเส้นโค้งในแต่ละคาบมีค่าเท่ากันเสมอ

2.3 การวิเคราะห์หาจำนวนรอบโดยใช้ LCM

ใช้ตัวคูณร่วมน้อย (LCM) ของรัศมี R และ r คำนวณจำนวนรอบน้อยที่สุด (N) ที่เส้นโค้งจะเคลื่อนที่กลับมาบรรจบเป็นลูปปิดพอดี

2.4 การหาความยาวเส้นโค้ง 1 คาบ แยกตาม 3 รูปแบบ

วิเคราะห์ความยาว 1 คาบ โดยแยกกรณีตามสัดส่วนพารามетริก $\lambda = d/r$:

2.4.1 ไฮโปไซคลอยด์ (Hypocycloid: $d = r$): ใช้เอกลักษณ์มุมครึ่งยอดรากที่สองเพื่อหาผลเฉลย พีชคณิตสำเร็จรูปโดยตรง

2.4.2 เคอร์เทตและโปรเลตไฮโปโทรคอยด์ (Curtate & Prolate: $d \neq r$): ใช้สมบัติมุมสองเท่าแปลงสู่รูปปริพันธ์รีสมบูรณ์ชนิดที่ 2

($0 \leq m \leq 1$) แล้วประยุกต์ใช้สูตรประมาณค่าข้อที่ 1 ของรามานุจันคำนวณรูปแบบปิด

2.5 การหาความยาวเส้นโค้งรวม 1 รอบสมบูรณ์

นำความยาว 1 คาบ (L_{cycle}) คูณกับจำนวนคาบทั้งหมด (N) เพื่อหาความยาวรวมสมบูรณ์ ($L_{total} = N \times L_{cycle}$) ในรอบค่าสั่งเดียว

2.6 ระเบียบวิธีการทดสอบความคลาดเคลื่อนทางวิศวกรรม

ใช้ "การสุ่มพารามетริก" สุ่มข้อมูล 3,000 ชุด คำนวณเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของสมการรูปแบบปิด เทียบกับค่าจริงจาก MATLAB/Python และระบบ CAD/CAM

3. ผลและอภิปรายผล

ในบทนี้ คณะผู้จัดทำได้นำเสนอผลการศึกษาและพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับคุณสมบัติและสมการความยาวส่วนโค้งของเส้นโค้งตระกูลไฮโปโทรคอยด์ (Hypotrochoid) ตามวิธีการดำเนินการในบทที่ 3 โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

3.1 สมการพารามетริกและการหาความยาวส่วนโค้งทั่วไป

จากการศึกษาการเคลื่อนที่ของจุดวาดที่ยึดติดกับ

วงกลมรัศมี r ซึ่งกลิ้งอยู่ภายในวงกลมรัศมี R โดยมีระยะห่างจากจุดศูนย์กลางวงกลมเล็กเท่ากับ d สามารถสร้างสมการพารามตริกเพื่อระบุพิกัด (x, y) ที่มุม θ ใดๆ ได้ดังนี้:

$$x(\theta) = (R-r)\cos(\theta) + d\cos\left(\left(\frac{R-r}{r}\right)\theta\right)$$

$$y(\theta) = (R-r)\sin(\theta) - d\sin\left(\left(\frac{R-r}{r}\right)\theta\right)$$

กำหนดตัวแปรดังนี้:

- R = รัศมีวงกลมใหญ่ (วงคงที่)
- r = รัศมีวงกลมเล็ก (วงที่กลิ้งด้านใน)
- d = ระยะจากจุดศูนย์กลางวงกลมเล็กไปยังจุดปากกา (Tracing point)
- กำหนดให้ $k = \frac{R-r}{r}$ และ $\lambda = \frac{d}{r}$

สมการพิกัดตำแหน่ง x และ y ของจุดปากกาที่มุม θ ใดๆ คือ:

$$x(\theta) = (R-r)\cos\theta + d\cos(k\theta)$$

$$y(\theta) = (R-r)\sin\theta - d\sin(k\theta)$$

หาอนุพันธ์ย่อย $x'(\theta)$ และ $y'(\theta)$ ด้วยกฎลูกโซ่ แล้วแทนค่าลงในสูตรหลักการหาความยาวเส้นโค้ง

$$L = \int \sqrt{(x')^2 + (y')^2} d\theta \text{ เมื่อจัดรูปด้วย}$$

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ และสูตรผลบวกโคไซน์ จะได้สมการตั้งต้นสำหรับการหาความยาวเส้นโค้งทั่วไป:

$$L = (R-r) \int_0^\theta \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\left(\frac{R}{r}\theta\right)} d\theta$$

3.2 การพิสูจน์ความสม่ำเสมอของระยะทางในการหมุนแต่ละคาบ

จากสมการความยาวส่วนโค้งในหัวข้อ 3.1 กำหนดให้ฟังก์ชันของอัตราการเปลี่ยนแปลงความยาวเส้นโค้งคือ

$$f(\theta) = (R-r) \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\left(\frac{R}{r}\theta\right)}$$

จะเห็นว่าตัวแปร θ อยู่ในรูปของฟังก์ชัน

$$\cos\left(\frac{R}{r}\theta\right) \text{ ดังนั้น คาบการเคลื่อนที่ 1 รอบ } (\Delta\theta)$$

$$\text{ของฟังก์ชันนี้คือ } \frac{R}{r}\Delta\theta = 2\pi \Rightarrow \Delta\theta = \frac{2\pi r}{R}$$

ความยาวส่วนโค้งของรอบที่ n ใดๆ (S_n) สามารถหาได้จาก:

$$S_n = \int_{(n-1)\Delta\theta}^{n\Delta\theta} f(\theta) d\theta$$

$$\int_0^{\Delta\theta} f(\theta) d\theta = \int_{\Delta\theta}^{2\Delta\theta} f(\theta) d\theta = \dots = \text{ค่าคงที่}$$

สรุปผลการพิสูจน์: เนื่องจาก $f(\theta)$ เป็นฟังก์ชันคาบ ค่าปริพันธ์ซึ่งแทนความยาวรวมของการกลิ้งในแต่ละคาบจึงมีค่าเท่ากันอย่างสมบูรณ์แบบเสมอ

3.3 การวิเคราะห์หาจำนวนรอบที่ใช้ในการเคลื่อนที่กลับมายังจุดเริ่มต้น

เมื่อวงกลมเล็กกลิ้งอยู่ภายในวงกลมใหญ่โดยไม่ไถล ระยะทางของเส้นโค้งบนวงกลมใหญ่ที่ถูกสัมผัสย่อมเท่ากับระยะทางบนวงกลมเล็ก หากวงกลมเล็กโคจรไป k รอบ และหมุนรอบตัวเองไป n รอบ จะได้ความสัมพันธ์ $k(2\pi R) = n(2\pi r)$ หรือ

$k \cdot R = n \cdot r$ ซึ่งก็คือการหาตัวคูณร่วมน้อย (LCM) ของ R และ r นั่นคือ

$k \cdot R = n \cdot r = LCM(R, r)$ เมื่อจัดรูปสมการเพื่อหาจำนวนรอบที่วงกลมย่อยหมุนรอบตัวเอง n จะได้ผลลัพธ์คือ: $n = \frac{LCM(R, r)}{r}$

3.4 การหาความยาวเส้นโค้งที่เกิดจากการ

1 คาบของตระกูลไฮโปโทรคอยด์

3.4.1 การหาความยาวเส้นโค้งของ

Hypocycloid ($d = r$ หรือ $\lambda = 1$)

เมื่อแทนค่า $\lambda = 1$ ลงในสมการตั้งต้น พบว่าได้รากที่สองจะสามารถจัดรูปได้โดยใช้เอกลักษณ์มุมครึ่ง $1 - \cos(A) = 2\sin^2(A/2)$ ทำให้สามารถถอดรากที่สองและหาปริพันธ์ทางพีชคณิตได้สำเร็จรูป โดยความยาวส่วนโค้งสำหรับ 1 คาบ (1 กลีบ) คือ

$$L_{1 \text{ period}} = 2(R-r) \int_0^{\frac{2\pi R}{R}} \sin\left(\left(\frac{R}{2r}\right)\theta\right) d\theta = \frac{8r(R-r)}{R}$$

3.4.2 การหาความยาวเส้นโค้งของ Curtate Hypotrochoid ($d < r$ หรือ $0 < \lambda < 1$)

เนื่องจาก $\lambda < 1$ ค่าต่ำสุดของพจน์ใต้รากที่สองคือ $(1-\lambda)^2$ ซึ่งมีค่ามากกว่า 0 เสมอ ส่งผลให้ความเร็วของจุดวาดไม่เคยเป็นศูนย์ กราฟที่ได้จึงมีความเรียบ (Smooth) และไม่มีจุดหักมุม (Cusps) จึงต้องประยุกต์ใช้วิธีการทางตัวเลขผ่านฟังก์ชัน ปริพันธ์วงรีชนิดที่ 2 (Elliptic Integral of the Second Kind)

$$\text{โดยมีพารามิเตอร์ } m = \frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2}$$

3.4.3 การหาความยาวเส้นโค้งของ Prolate Hypotrochoid ($d > r$ หรือ $\lambda > 1$)

เมื่อ $\lambda > 1$ ความเร็วของจุดวาดก็ยังคงไม่เป็นศูนย์เช่นเดียวกับกรณี Curtate แต่จุดวาดเคลื่อนที่เร็วกว่าการหมุนสัมผัส ส่งผลให้เกิดโครงสร้างเส้นโค้งที่ตัดทับกันเองเป็นรูปการคำนวณความยาวส่วนโค้งใน 1 คาบ จำเป็นต้องใช้ปริพันธ์วงรีชนิดที่ 2 เช่นเดียวกัน โดยค่าพารามิเตอร์ m ยังคงมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 ตามสมบัติของฟังก์ชันวงรี

3.5 การหาความยาวเส้นโค้งรวมของ 1 รอบ สมบูรณ์

จากผลการดำเนินงานในหัวข้อ 4.2 ที่พิสูจน์ว่าระยะทางของเส้นโค้งใน 1 คาบมีความยาวเท่ากันเสมอ คณะผู้จัดทำจึงสามารถคำนวณความยาวส่วนโค้งรวมทั้งหมด (L_{total}) ของเส้นโค้งปิดไฮโปโทรคอยด์ได้ โดยการนำความยาวส่วนโค้งที่เกิดจากการเคลื่อนที่ 1 คาบ $L_{(1 \text{ period})}$ จากหัวข้อ 4.4 มาคูณด้วยจำนวนคาบทั้งหมด (N) ที่วิเคราะห์ได้จากหัวข้อ 4.3 สามารถเขียนเป็นสมการความสัมพันธ์หลักได้ดังนี้:

$$L_{\text{total}} = \left(\frac{LCM(R, r)}{r} \right) \times L_{1 \text{ period}}$$

จากการประยุกต์ใช้สมการความสัมพันธ์หลัก สามารถสรุปความยาวส่วนโค้งรวมของไฮโปโทรคอยด์ทั้ง 3 รูปแบบได้ดังนี้: ความยาวรวมของ Hypocycloid ($d = r$)

$$L_{\text{total}} = \frac{8(R-r) \cdot LCM(R, r)}{R}$$

ความยาวรวมของ Curtate และ Prolate

Hypotrochoid ($d \neq r$)

สำหรับกรณีที่จุดวาดไม่ได้อยู่บนขอบวงกลมกลิ้ง ต้องถูกแปลงให้อยู่ในรูปของ ฟังก์ชันปริพันธ์วงรีชนิดที่ 2 โดยตรง

เมื่อกำหนดให้ $\lambda = \frac{d}{r}$ ความยาวเส้นโค้งรวมจะถูก

เขียนในรูปแบบของฟังก์ชันวงรีดังนี้:

$$L_{\text{total}} = \left(\frac{LCM(R, r)}{r} \right) \times \left[(R-r) \int_0^R \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\left(\left(\frac{R}{r}\right)\theta\right)} d\theta \right]$$

ใช้สมบัติตรีโกณมิติมุมสองเท่า

$$\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$$

$$f(\theta) = (R-r) \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \left[2\cos^2\left(\frac{R}{2r}\theta\right) - 1 \right]}$$

$$f(\theta) = (R-r)(1+\lambda) \sqrt{1 - \frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2} \cos^2\left(\frac{R}{2r}\theta\right)}$$

$$\text{กำหนดให้ } m = \frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2} :$$

$$f(\theta) = (R-r)(1+\lambda) \sqrt{1 - m \cos^2\left(\frac{R}{2r}\theta\right)}$$

อินทิเกรต $f(\theta)$ ตลอดช่วง 1 คาบ คือจาก $\theta = 0$

$$\text{ถึง } \theta = \frac{2\pi r}{R}$$

$$L_1 = \int_0^{\frac{2\pi r}{R}} (R-r)(1+\lambda) \sqrt{1 - m \cos^2\left(\frac{R}{2r}\theta\right)} d\theta$$

$$\text{เปลี่ยนตัวแปร ให้ } u = \frac{R}{2r} \theta \text{ จะได้ } d\theta = \frac{2r}{R} du$$

และเปลี่ยนขอบเขตการอินทิเกรตเป็น 0 ถึง π

$$L_1 = \frac{2r(R-r)(1+\lambda)}{R} \int_0^\pi \sqrt{1 - m \cos^2 u} du$$

จากสมบัติความสมมาตรของตรีโกณมิติ

$$\int_0^\pi \sqrt{1 - m \cos^2 u} du \text{ จะมีค่าเท่ากับ}$$

$2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m \sin^2 \phi} d\phi$ ซึ่งก่อนหน้านี้นี้ก็คือนิยาม

มาตรฐานของ ปริพันธ์วงรีชนิดที่สอง $E(m)$

เราจะทำการประมาณโดยใช้ Ramanujan's First Approximation โดยอย่างแรกเราจะทำการพิสูจน์คุณสมบัติสมมาตรเชิงพีชคณิตของพารามิเตอร์ m กำหนดให้ฟังก์ชันพารามิเตอร์ m ในรูปตัวแปร λ คือ:

$$m(\lambda) = \frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2} \text{ เมื่อ } \lambda \in (0, \infty)$$

พิจารณาพารามิเตอร์ในรูปของส่วนกลับ $\frac{1}{\lambda}$ จะได้ว่า

$$m\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{4\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^2}$$

จัดรูปสมการจะได้ว่า $m\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{4}{\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2} \Rightarrow$

$$m\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{4\lambda}{(\lambda+1)^2}$$

สรุปจากสมการข้างต้นจะเห็นได้ว่า

$$m(\lambda) = m(1/\lambda)$$

จากสมการข้างต้นแสดงให้เห็นอย่างเด่นชัดว่า

$$m(\lambda) = m(1/\lambda) \text{ ฟังก์ชันนี้มีสมมาตรสะท้อนรอบ}$$

จุด $\lambda = 1$ ส่งผลให้ค่าพารามิเตอร์ m ถูกจำกัด

ขอบเขต อยู่ภายในช่วง $[0, 1]$ เสมอ

จากคุณสมบัติ $m(\lambda) = m(1/\lambda)$ ย่อมส่งผลให้ค่า

ปริพันธ์วงรีมีค่าเท่ากันด้วยคือ

$$E(m(\lambda)) = E\left(m\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)$$

ดังนั้นเราจึงสามารถใช้ Ramanujan's First Approximation ในการประมาณค่าของ m โดยสูตรตั้งต้นของรามานูจัน:

$$P \approx \pi \left[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)} \right]$$

และจากเส้นรอบวงวงรี (P) สามารถคำนวณได้โดยใช้ความยาวครึ่งแกนเอก (a) และปริพันธ์วงรีสมบูรณ์ชนิดที่ 2

$$P = 4aE(m) \text{ --- (สมการที่ 2)}$$

โดยที่พารามิเตอร์ m ถูกนิยามจากสัดส่วนของแกนวงรีคือ:

$$m = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow b = a\sqrt{1-m} \text{ เมื่อนำ}$$

ความสัมพันธ์ $b = a\sqrt{1-m}$ ไปแทนค่าลงในสมการที่ 1 จะได้

$$P \approx \pi a \left[3(1+\sqrt{1-m}) - \sqrt{6-3m+10\sqrt{1-m}} \right]$$

จาก สมการที่ 2

$$4aE(m) \approx \pi a \left[3(1+\sqrt{1-m}) - \sqrt{6-3m+10\sqrt{1-m}} \right]$$

$$E(m) \approx \frac{\pi}{4} \left[3(1+\sqrt{1-m}) - \sqrt{6-3m+10\sqrt{1-m}} \right]$$

จาก $L_1 = \frac{4r(R-r)(1+\lambda)}{R} E(m)$ จะได้สมการ

$$\text{ความยาวคือ } L_1 \approx \frac{\pi r(R-r)(1+\lambda)}{R} \left[3(1+\sqrt{1-m}) - \sqrt{6-3m+10\sqrt{1-m}} \right]$$

การหาความยาวเส้นโค้งรวม (L_{total})

$$L_{total} = n \times L_1$$

$$L_{total} \approx \frac{\pi(R-r)(1+\lambda) \cdot LCM(R, r)}{R}$$

$$\left[3(1+\sqrt{1-m}) - \sqrt{6-3m+10\sqrt{1-m}} \right]$$

3.6 การนำไปประยุกต์ใช้ในเครื่องจักรวิศวกรรม

คณะผู้จัดทำทดสอบความน่าเชื่อถือโดยวิธี "การสุ่มพารามิเตอร์" สุ่มตัวแปร R, r, d รวม 3,000 รูปแบบ เปรียบเทียบกับค่าจริงความละเอียดทศนิยม 15 ตำแหน่งจาก MATLAB/Python ได้ผลลัพธ์ดังตาราง:

กรณีทดสอบ	จำนวนชุด	Mean Error	Std Dev (%)	Max Error	Min Error (%)

	ข้อมูล	r	r		
	ล	(%)	(%)		
Curtate (d < r)	1,00 0	0.01 42	0.01 15	0.06 00	0.0000 002
Hypocycloid (d = r)	1,00 0	0.00 00	0.00 00	0.00 00	0.0000
Prolate (d > r)	1,00 0	0.01 85	0.01 32	0.06 00	0.0000 010

การเปรียบเทียบเชิงประสิทธิภาพกับระบบวิศวกรรม (CAD):

เมื่อตรวจสอบเปรียบเทียบกับซอฟต์แวร์วิศวกรรม FreeCAD v0.21 ที่ใช้วิธีคำนวณระยะทางแบบซอยย่อยเส้นโค้ง (Curve Tessellation = 0.1 mm) พบว่า หากซอฟต์แวร์ต้องการความแม่นยำสูงจนค่าความคลาดเคลื่อนลดต่ำกว่า 0.06% เท่ากับแบบจำลองรูปปิด ระบบต้องใช้จุดควบคุมมากกว่า 15,000 จุด และใช้เวลาคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยถึง 12.4 มิลลิวินาที ต่อเส้นโค้ง ในขณะที่แบบจำลองรูปแบบปิด $O(1)$ ของ

โครงการนี้ ใช้เวลาประมวลผลน้อยกว่า 0.001 มิลลิวินาที ภายใต้ระดับความคลาดเคลื่อนเดียวกัน ซึ่งพิสูจน์ถึงศักยภาพการนำไปใช้งานควบคุมระบบแบบเรียลไทม์ได้จริง

สรุปผล

จากการศึกษาและพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ คณะผู้จัดทำได้ระเบียบวิธีในการหาความยาวเส้นโค้งรวมของไฮโปโทรคอยด์ โดยใช้วิธีการคำนวณความยาวใน 1 คาบ (1 Period) คูณด้วยจำนวนรอบที่ทำให้เกิดเส้นโค้งปิด ซึ่งสรุปผลได้ดังนี้:

1. เส้นโค้งจะกลับมาบรรจบที่จุดเริ่มต้นพอดีเมื่อวงกลมกลิ้งโคจรและหมุนรอบตัวเองเป็นจำนวนรอบที่สัมพันธ์กับค่าตัวคูณร่วมน้อย (LCM) ของรัศมีวงกลมทั้งสอง โดยจำนวนคาบทั้งหมด (n)

$$\text{เท่ากับ } n = \frac{\{LCM(R, r)\}}{r}$$

2. สมการความยาวเส้นโค้งรวม
(Total Arc Length)

กรณี Hypocycloid ($d = r$): สามารถหาผลเฉลยในรูปแบบสมการพิกัดพารามิเตอร์ได้คือ

$$L_{\{total\}} = 8(R-r) \left[\frac{\{LCM(R, r)\}}{R} \right]$$

กรณี Curtate และ Prolate

Hypotrochoid ($d \neq r$): ต้องประยุกต์ใช้

ฟังก์ชันปริพันธ์รีชนิดที่ 2 (Incomplete Elliptic Integral of the Second Kind) ในการคำนวณ โดยสมการความยาวรวมคือ

$$L_{total} = \left(\frac{LCM(R, r)}{r} \right)$$

$$\left[(R-r) \int_0^{\frac{2\pi r}{R}} \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos\left(\frac{Rr}{\theta}\right)} d\theta \right]$$

และสูตรจากการประมาณค่า

$$L_{total} \approx \frac{\pi(R-r)(1+\lambda) \cdot LCM(R, r)}{R}$$

$$\left[3(1 + \sqrt{1-m}) - \sqrt{6-3m+10\sqrt{1-m}} \right]$$

กิตติกรรมประกาศ

โครงการนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดีด้วยความช่วยเหลือจาก นางสาวนงลักษณ์ อรรถกาญจน์ และ นางสาวจาลิณี อ้นเย็ก ครูที่ปรึกษาโครงการ โรงเรียนวิทยาศาสตร์จุฬาภรณราชวิทยาลัย ตรัง และครอบครัวของผู้จัดทำที่ให้การสนับสนุนเสมอมา **เอกสารอ้างอิง**

กิตติพงษ์ เจริญสุข. (2566). การออกแบบกลไกและชิ้นส่วนเครื่องจักรกลขั้นสูง. มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ.

ปฏิพัทธ์ หงษ์ทอง และคณะ. (2565). การประยุกต์ใช้ทางเดินเครื่องมือแบบหมุนวน ในงานกัดซีเอ็นซี. วารสาร วิศวกรรมศาสตร์และเทคโนโลยี, 15(2), 45-58.

Norton, R. L. (2009). Design of machinery: An introduction to the synthesis and analysis of mechanisms (4th ed.). McGraw-Hill.



The 6th PCSHS Science Symposium 2026

"Driving the Future with Scientific Innovation"

Rauch, M., Duc, S., & Hascoët, J. Y.
(2009). Tool path generation for five-axis
trochoidal machining. *International Journal of
Production Research*, 47(21), 6067–6083.

Weisstein, E. W. (2024). Hypotrochoid.
MathWorld — A Wolfram Web Resource.
[https://mathworld.wolfram.com/Hypotrochoid
.html](https://mathworld.wolfram.com/Hypotrochoid.html)