



รัศมีวงกลมมากที่สุดที่แนบในรูป n เหลี่ยม ด้านเท่ามุมเท่า กับปัญหาการบรรจุลูกป็นในตลับลูกป็น

The Maximum Inscribed Circle Radius in a Regular n -gons and Its Application to Ball Bearing Packing Problems

กฤตภาส จำปา กิตติกันตพงศ์ เขียวน้อย

นงลักษณ์ อรรถกาญจน์¹ จาลินี ฮั่นเย็ก²

¹ โรงเรียนวิทยาศาสตร์จุฬาภรณราชวิทยาลัย ตรัง อำเภอเมืองตรัง จังหวัดตรัง 92000

Email: 06340@pcshstrg.ac.th

บทคัดย่อ

โครงการนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษารัศมีวงกลมมากที่สุดที่แนบในรูป n เหลี่ยม ด้านเท่ามุมเท่า กับปัญหาการบรรจุลูกป็นในตลับลูกป็น โดยอาศัยหลักการเรขาคณิตและเอกลักษณ์ตรีโกณมิติเป็นเครื่องมือในการคำนวณ ผู้จัดทำได้กำหนดความยาวด้านของรูป n เหลี่ยม ด้านเท่ามุมเท่า เป็น s หน่วย และวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างจุดศูนย์กลาง เส้นรัศมี และด้านของรูป n เหลี่ยม ด้านเท่ามุมเท่า เพื่อพัฒนาสูตรคำนวณที่สามารถใช้ได้กับ n เหลี่ยม ด้านเท่ามุมเท่าทุกรูป ผลการดำเนินการทำให้ได้สูตรทั่วไปสำหรับรัศมีของวงกลมเล็ก (r) ซึ่งสามารถใช้ในการประเมินขนาดวงกลมที่บรรจุในรูปเรขาคณิตดังกล่าวได้ นอกจากนี้ยังมีการประยุกต์ใช้สูตรเพื่อนำไปใช้ในงานวิศวกรรม อย่างการออกแบบตลับลูกป็น โดยสามารถหาจำนวนลูกป็นจากรัศมีลูกป็น หรือหารัศมีมากที่สุดของลูกป็นจากจำนวนที่ต้องการได้ โครงการนี้จึงเป็นประโยชน์ต่อการคำนวณเชิงเรขาคณิต และการออกแบบเชิงวิศวกรรม เพื่อทำนายจำนวนที่ต้องการผลิตก่อนดำเนินการผลิต อันเป็นการลดต้นทุนในภาคการผลิตได้

คำสำคัญ: n เหลี่ยม ด้านเท่ามุมเท่า, การบรรจุลูกป็น

1. บทนำ

รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าเป็นรูปเรขาคณิตพื้นฐานที่มีความสำคัญอย่างยิ่งในวิชาคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะในหัวข้อเรขาคณิตเชิงวิเคราะห์และตรีโกณมิติ เนื่องจากเป็นรูปที่มีโครงสร้างสมมาตรชัดเจน ทำให้สามารถศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนด้าน มุมภายใน ความยาวด้าน และองค์ประกอบอื่น ๆ ได้อย่างเป็นระบบ การทำความเข้าใจความสัมพันธ์เหล่านี้ช่วยพัฒนาทักษะการคิดวิเคราะห์ การให้เหตุผล และการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

จากการศึกษาพบว่า ในรูป n เหลี่ยม ด้านเท่ามุมเท่า สามารถสร้างวงกลมที่แนบภายในรูปได้อย่างพอดี โดยจุดศูนย์กลางของวงกลมจะอยู่ที่จุดศูนย์กลางของรูปหลายเหลี่ยม และรัศมีของวงกลมดังกล่าวมีความสัมพันธ์

โดยตรงกับความยาวด้านและจำนวนด้านของรูป นอกจากนี้ เมื่อลากเส้นจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดยอดแต่ละจุด จะสามารถแบ่งรูป n เหลี่ยม ด้านเท่ามุมเท่าออกเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่เท่ากันทุกประการ ทำให้สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของด้าน มุม และรัศมีได้ด้วยหลักการทางตรีโกณมิติ

ข้อสังเกตดังกล่าวทำให้คณะผู้จัดทำเกิดความสนใจที่จะศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนด้านของรูป n เหลี่ยม ด้านเท่ามุมเท่า ความยาวด้าน และรัศมีของวงกลมที่แนบภายในรูป เพื่อพัฒนาสูตรทั่วไปที่สามารถใช้คำนวณค่ารัศมีได้โดยตรง โดยไม่ต้องอาศัยการวัดจริงหรือการเขียนรูปใหม่ทุกครั้ง อันจะช่วยให้การคำนวณมีความถูกต้อง แม่นยำ และเป็นระบบมากยิ่งขึ้น

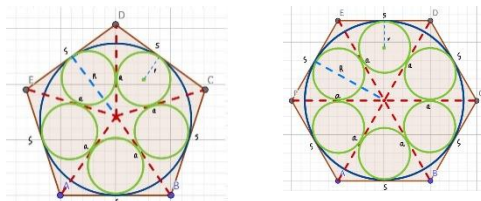
โครงการนี้จึงมีความสำคัญในฐานะการประยุกต์ใช้ความรู้ทางเรขาคณิตและตรีโกณมิติในการสร้างสูตรทั่วไปสำหรับรูป n เหลี่ยม ด้านเท่ามุมเท่า ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ การวิเคราะห์เชิงเรขาคณิต และการออกแบบเชิงวิศวกรรมที่เกี่ยวข้องกับรูปทรงหลายเหลี่ยมได้อย่างมีประสิทธิภาพ ทั้งยังเป็นการเสริมสร้างความเข้าใจเชิงลึกเกี่ยวกับโครงสร้างและสมบัติของรูปเรขาคณิตอย่างเป็นระบบอีกด้วย

2. วิธีการดำเนินงาน

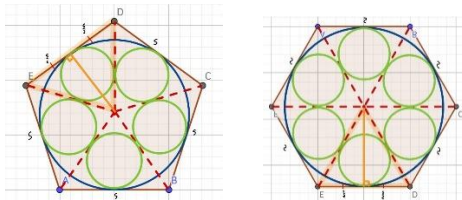
2.1 การคำนวณหาสูตรทั่วไปของรัศมีวงกลมเล็ก (r) ที่แนบในรูปสามเหลี่ยมย่อย

แบ่งออกเป็น 4 ขั้นตอน คือ

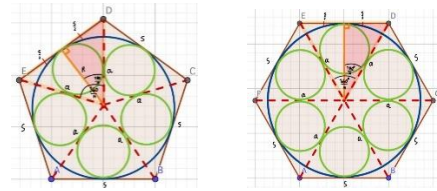
2.1.1 เลือกวาดรูปแบบ n เหลี่ยม ด้านเท่ามุมเท่าใดๆ โดยกำหนดความยาวด้านเป็น s หน่วยและวาดวงกลมแนบในรูป n เหลี่ยม ด้านเท่ามุมเท่า มี R เป็นรัศมีวงกลมใหญ่ และ r เป็นรัศมีวงกลมเล็ก เส้นที่ลากจากจุดศูนย์กลางไปจุดยอด ของรูป n เหลี่ยม ด้านเท่ามุมเท่า ยาว a หน่วย



2.1.2 ลากเส้นจากจุดศูนย์กลางของ n เหลี่ยม ไปตั้งฉากกับด้านของรูป n เหลี่ยม



2.1.3 ใช้สูตรการหาพื้นที่ สามเหลี่ยมในตรีโกณมิติ ในการหาพื้นที่สามเหลี่ยมย่อย



$$a = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + R^2} \text{ มาจากทฤษฎีบทพีทาโกรัส}$$

$$a = \sqrt{\left(R \times \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2 + R^2}$$

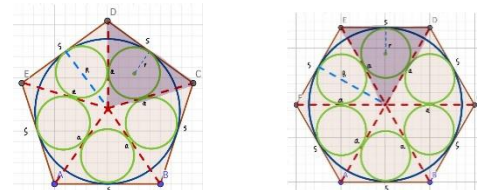
$$a = R \sqrt{\tan^2\left(\frac{\pi}{n}\right) + 1}$$

$$\text{จาก พื้นที่สามเหลี่ยม} = \frac{1}{2} ab \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \frac{1}{2} a^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) &= \frac{1}{2} \left(R \sqrt{\tan^2\left(\frac{\pi}{n}\right) + 1}\right)^2 \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ &= R^2 \left(\tan^2\left(\frac{\pi}{n}\right) + 1\right) \left(\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) \end{aligned}$$



2.1.4 ใช้สูตรการหารัศมีของวงกลมที่แนบในรูปสามเหลี่ยม และเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ ในการจัดรูปและสูตรทั่วไปที่สามารถใช้คำนวณรัศมีของวงกลมเล็ก (r) ที่แนบในรูปสามเหลี่ยมย่อย



$$\text{จาก } r = \frac{2[\Delta]}{s + a + a} ; [\Delta] \text{ คือ พื้นที่ของสามเหลี่ยม}$$

$$\text{จะได้ } r = \frac{2[\Delta]}{s + 2a}$$

$$r = \frac{2\left(\frac{1}{2} \times R^2 \left(\tan^2\left(\frac{\pi}{n}\right) + 1\right) \left(\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)\right)}{2R \left(\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) + 2\left(R \sqrt{\tan^2\left(\frac{\pi}{n}\right) + 1}\right)}$$



$$r = \frac{R \times \sec^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2 \left(\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sec\left(\frac{\pi}{n}\right) \right)}$$

$$r = \frac{R \times \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \right)}$$

$$r = \frac{R \times 2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2 \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + 1 \right)}$$

$$r = \frac{R \times \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

2.2 การนำไปประยุกต์กับตลับลูกปืน

แบ่งออกเป็น 3 กรณี คือ

2.2.1 ใช้สูตรจากข้อ 2.1 มาพิจารณาในกรณีการหารัศมีของลูกปืน (r) เมื่อทราบรัศมีวงกลม (R) และจำนวนลูกปืน

2.2.2 ใช้สูตรจากข้อ 2.1 มาจัดรูปเพื่อต้องการหาสูตรในกรณีการหาจำนวนลูกปืน เมื่อทราบรัศมีวงกลม (R) และรัศมีลูกปืน (r)

$$[n] = \left\lfloor \frac{\pi}{\sin^{-1}\left[\frac{r}{R-r}\right]} \right\rfloor$$

2.2.3 ใช้สูตรจากข้อ 2.1 มาจัดรูปเพื่อต้องการหาสูตรในกรณีการหารัศมีให้ลูกปืนแนบกันพอดี

$$R = \frac{r \cdot \left[1 + \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \right]}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

3. ผลการทดลอง

ในการวิเคราะห์รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างความยาวด้านกับรัศมีของวงกลมล้อมรอบได้ โดยพิจารณาแบ่งรูปออกเป็น

สามเหลี่ยมที่มีจุดศูนย์กลางเป็นจุดยอด ซึ่งทำให้เกิดความสัมพันธ์ทางตรีโกณมิติ ดังนั้นจึงสามารถใช้

$$r = \frac{R \times \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

ในการออกแบบตลับลูกปืน สิ่งสำคัญคือการคำนวณหารัศมีของลูกปืน (r) ที่เหมาะสมเพื่อให้สามารถบรรจุลงในวงกลมล้อมรอบที่มีรัศมี (R) ตามที่กำหนด โดยต้องคำนึงถึง จำนวนลูกปืนที่ต้องการใส่เข้าไปให้พอดี (n)

ดังนั้นจากสูตรได้ข้างต้น ทำให้เราสามารถวิเคราะห์ค่าต่างๆ ที่ใช้ในการผลิตลูกปืนได้ เมื่อเรากำหนดค่าต่างๆ ให้สอดคล้องกับลูกปืน ยกตัวอย่างในการผลิต เช่น

3.1 หากเราต้องการผลิตลูกปืนที่มีรัศมีของตลับลูกปืน (R) ยาว 6 มิลลิเมตร และจำนวนลูกปืน (n) 5 ลูก เราจะต้องใช้รัศมีของลูกปืน (r) กี่มิลลิเมตร

$$\text{จาก } r = \frac{R \times \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$\text{จะได้ } r = \frac{6 \times \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}$$

$$r = 2.22 \text{ มิลลิเมตร}$$

3.2 หากเราต้องการผลิตลูกปืนที่มีรัศมีของตลับลูกปืน (R) ยาว 12 มิลลิเมตร และรัศมีของลูกปืน (r) ยาว 5 มิลลิเมตร เราจะต้องใช้ลูกปืนจำนวนกี่ลูก

$$\text{จาก } [n] = \left\lfloor \frac{\pi}{\sin^{-1}\left[\frac{r}{R-r}\right]} \right\rfloor$$

$$\text{จะได้ } [n] = \left\lfloor \frac{\pi}{\sin^{-1}\left[\frac{5}{12-5}\right]} \right\rfloor$$

$$[n] = [3.94]$$

$$n = 3 \text{ ลูก}$$

3.3 หากเราต้องการผลิตลูกปืนที่มีรัศมีของลูกปืน (r) ยาว 7 มิลลิเมตร และจำนวนลูกปืน (n) 9 ลูก เราจะต้องใช้รัศมีของตลับลูกปืนขนาดเท่าไรเพื่อให้ลูกปืนแนบสนิทกันพอดี



$$\text{จาก } R = \frac{r \cdot \left[1 + \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \right]}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$\text{จะได้ } R = \frac{7 \cdot \left[1 + \sin\left(\frac{\pi}{9}\right) \right]}{\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}$$

$$R = 27.47 \text{ มิลลิเมตร}$$

4. สรุปและอภิปรายผล

จากการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีวงกลมเล็ก r รัศมีวงกลมใหญ่ R และจำนวนวงกลมเล็ก n ที่จัดเรียงล้อมรอบกันอย่างสมมาตร พบว่าสามารถสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยอาศัยหลักเรขาคณิตของรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ทำให้ได้สูตรทั่วไปที่สามารถใช้คำนวณค่าตัวแปรใดตัวแปรหนึ่ง เมื่อทราบอีกสองตัวแปร ได้แก่ การหา r จาก R และ n การหา n จาก R และ r และการหา R จาก r และ n

ผลการคำนวณจากตัวอย่างแสดงให้เห็นว่าสูตรดังกล่าวให้ค่าที่สอดคล้องกับเงื่อนไขทางเรขาคณิตจริง และสามารถใช้วิเคราะห์ได้ทั้งในกรณีคำนวณไปข้างหน้าและคำนวณย้อนกลับได้โดยตรง ผลการศึกษาชี้ให้เห็นว่าการเพิ่มจำนวนวงกลม n ไม่ได้ทำให้สามารถใช้พื้นที่ได้เพิ่มขึ้นแบบเป็นสัดส่วนโดยตรง ทำให้เมื่อจำนวนวงกลมเพิ่มขึ้น จำเป็นต้องเพิ่มรัศมีวงกลมใหญ่ R ในอัตราที่มากขึ้นตามไปด้วย

องค์ความรู้นี้สามารถประยุกต์ใช้ในงานออกแบบที่ต้องการการจัดเรียงวัตถุทรงกลมภายในขอบเขตจำกัด เช่น การออกแบบตลับลูกปืน การจัดเรียงชิ้นส่วนในภาชนะทรงกระบอก หรือการวางองค์ประกอบแบบสมมาตรในงานวิศวกรรมและสถาปัตยกรรม

ดังนั้น งานศึกษานี้แสดงให้เห็นถึงการเชื่อมโยงระหว่างทฤษฎีเรขาคณิตกับการประยุกต์ใช้จริง ช่วยให้การออกแบบมีความแม่นยำ ลดการทดลองซ้ำ และเพิ่มประสิทธิภาพในการใช้พื้นที่อย่างเป็นระบบ

กิตติกรรมประกาศ

โครงการเรื่อง รัศมีวงกลมมากที่สุดที่แนบในรูป n เหลี่ยม ด้านเท่ามุมเท่า กับปัญหาการบรรจุลูกปืนในตลับลูกปืน สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี คณะผู้จัดทำต้องขอขอบคุณกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่ให้สถานที่ในการศึกษาหาความรู้ ขอขอบคุณคุณครูณงลักษณ์ อรรถกาญจน์ และคุณครูจาลินี ฮั่นเย็ก ครูที่ปรึกษาโครงการที่คอยให้คำปรึกษาโดยตลอด ขอขอบคุณบิดามารดา ที่คอยให้ความช่วยเหลือ จัดเตรียมสถานที่และให้กำลังใจ ทำให้สามารถทำโครงการนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี ขอขอบคุณคณะผู้จัดทำโครงการทุกคนที่ช่วยกันคิดและทำโครงการด้วยกันมาโดยตลอด และสุดท้ายนี้ต้องขอขอบคุณโรงเรียนวิทยาศาสตร์จุฬารามราชวิทยาลัย ตรัง ที่มอบโอกาสอันดีให้นักเรียนทุกคนได้ทำโครงการ เพื่อให้สามารถนำความรู้ที่มีในห้องเรียนไปประยุกต์ใช้ให้เกิดประโยชน์ได้

เอกสารอ้างอิง

- Page, J. D. (2026). *Apothem*. In *Math Open Reference*. สืบค้นจาก <https://www.mathopenref.com/apothem.html>
- SmartMathPro. (2023). *ตรีโกณมิติ ม.5*. สืบค้นจาก <https://www.smartmathpro.com/article/trigonometric-functions/>
- SmartMathPro. (2025). *สรุปเนื้อหา ทฤษฎีบทพีทาโกรัส*. สืบค้นจาก <https://www.smartmathpro.com/article/pythagorean-theorem-m2/>
- Weisstein, E. W. (2026). *Regular Polygon*. สืบค้นจาก <https://mathworld.wolfram.com/RegularPolygon.html>