

การวิเคราะห์ลักษณะทางกายภาพและวัฏจักรกัมมันตภาพแม่เหล็กของดาว Kepler-17
ผ่านเทคนิคการประมวลผลสัญญาณจากกราฟแสงการส่งผ่านของดาวเคราะห์นอกระบบสุริยะ
Physical Characterization and Magnetic Activity Cycle of Kepler-17 via Signal
Processing of Exoplanetary Transit Light Curves

พชรวิทย์ ศิริไทย

สิริวิมล วังวงศ์

¹โรงเรียนวิทยาศาสตร์จุฬาราชวิทยาลัย มุกดาหาร, ตำบลบางทรายใหญ่, อำเภอเมืองมุกดาหาร, จังหวัดมุกดาหาร 49000, ประเทศไทย
*E-mail: 06389@pccm.ac.th

บทคัดย่อ

โครงการวิจัยนี้มุ่งเน้นศึกษาลักษณะทางกายภาพของจุดมืดและประเมนวัฏจักรกัมมันตภาพแม่เหล็กของดาวฤกษ์ Kepler-17 โดยอาศัยข้อมูลกราฟแสงระยะเวลา 4 ปี จากภารกิจกล้องโทรทรรศน์อวกาศเคปเลอร์ ผู้วิจัยได้ทำการสกัดสัญญาณตกค้างที่เกิดจากการบดบังของดาวเคราะห์นอกระบบสุริยะผ่านบริเวณกัมมันตภาพบนผิวดาวฤกษ์ จากนั้นได้ประยุกต์ใช้แบบจำลองเบย์เซียนผ่านอัลกอริทึม Markov Chain Monte Carlo เพื่อวิเคราะห์พารามิเตอร์ของจุดมืด

ผลการศึกษาพบว่า แบบจำลองสามารถระบุค่าแอมพลิจูดสูงสุดของสัญญาณจุดมืดที่สอดคล้องกับหลักฟิสิกส์ได้ที่ 0.002261 ± 0.000066 ซึ่งนำไปสู่การประเมินอุณหภูมิภายในจุดมืดผ่านเทคนิคการกระจายความคลาดเคลื่อนแบบมอนเตคาร์โล ได้เท่ากับ 5435.1 ± 53.5 K โดยมีอุณหภูมิต่ำกว่าชั้นบรรยากาศโฟโตสเฟียร์ปกติเป็นระยะสัมพัทธ์ $T = 195.9$ K ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติของดาวฤกษ์ประเภท G-type นอกจากนี้ การพิสูจน์ความต่อเนื่องทางสถิติด้วยแผนภูมิสายน้ำตลอด 17 Quarters ยืนยันว่าสัญญาณตกค้างเป็นโครงสร้างทางฟิสิกส์ที่มีอายุชัวยาวนาน ไม่ใช่สัญญาณรบกวนสุ่ม การทดสอบเปรียบเทียบแบบจำลอง ด้วยดัชนี AIC และ BIC บนกลุ่มข้อมูลที่ทำ Binning บ่งชี้ถึงสถานะตรงพบแบบก้ำกึ่ง โดยปรากฏโครงสร้างสัญญาณรูปแบบสมมาตรคล้ายแบบ W-shaped Profile ซึ่งสะท้อนถึงพลวัตการเคลื่อนที่ของตำแหน่งจุดมืด และอิทธิพลตกค้างจากการแปรผันของขอบมืดดาวฤกษ์ องค์ความรู้ที่ค้นพบนี้ช่วยยืนยันถึงประสิทธิภาพของการประมวลผลสัญญาณร่วมกับแบบจำลองเชิงสถิติในการศึกษาพฤติกรรมทางแม่เหล็กของระบบดาวเคราะห์นอกระบบสุริยะได้อย่างแม่นยำ

คำสำคัญ: จุดมืดดาวฤกษ์, แบบจำลองเบย์เซียน, วัฏจักรกัมมันตภาพแม่เหล็ก

บทนำ

การศึกษาและตรวจวัดดาวเคราะห์นอกระบบสุริยะด้วยเทคนิคการผ่านหน้า มักเผชิญกับความท้าทายจากปรากฏการณ์พลวัตทางแม่เหล็กบนผิวดาวฤกษ์แม่ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการเกิดกลุ่มจุดมืด ซึ่งส่งผลให้ปรากฏสัญญาณตกค้างในลักษณะยอดนูนแหลม แทรกซ้อนอยู่บนกราฟแสง ปรากฏการณ์ดังกล่าวนอกจากจะลดทอนความแม่นยำในการคำนวณรัศมีและพารามิเตอร์วงโคจร

ของดาวเคราะห์แล้ว ในอีกแง่หนึ่ง สัญญาณตกค้างเหล่านี้กลับเป็นกุญแจสำคัญที่บรรจุข้อมูลเชิงลึกเกี่ยวกับโครงสร้างสนามแม่เหล็กและสภาพแวดล้อมทางอวกาศของระบบดาวเคราะห์ดวงนั้น ด้วยเหตุนี้ โครงการวิจัยนี้จึงมุ่งศึกษาลักษณะทางกายภาพและวิวัฒนาการวัฏจักรกัมมันตภาพแม่เหล็กของดาวฤกษ์ Kepler-17 ซึ่งเป็นดาวฤกษ์ที่มีกัมมันตภาพทางแม่เหล็กสูง โดยอาศัยฐานข้อมูล

กราฟแสงที่มีความต่อเนื่องยาวนาน 4 ปี จากภารกิจกล้องโทรทรรศน์อวกาศเคปเลอร์ ในการดำเนินงาน ผู้วิจัยได้ประยุกต์ใช้เทคนิคการประมวลผลสัญญาณส่วนต่างร่วมกับแบบจำลองคณิตศาสตร์เชิงทฤษฎี ภายใต้แนวคิดแบบจำลองเบย์เซียนด้วยอัลกอริทึม Markov Chain Monte Carlo เพื่อสกัดและประมาณค่าพารามิเตอร์กายภาพของจุดมืด ทั้งนี้ขอบเขตของการวิจัยจำกัดอยู่เพียงการวิเคราะห์ฟิสิกส์ดาราศาสตร์และพลวัตการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กผิวดาวฤกษ์เป็นสำคัญ โดยไม่ครอบคลุมถึงการวิเคราะห์องค์ประกอบทางเคมีเชิงลึกของระบบดาว โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อเพื่อวิเคราะห์และประเมินคุณลักษณะทางกายภาพของจุดมืดบนผิวดาวฤกษ์ Kepler-17 ซึ่งครอบคลุมถึงพารามิเตอร์แอมพลิจูดสัญญาณ สัดส่วนเชิงพื้นที่สัมผัส อุณหภูมิภายในจุดมืด และเพื่อศึกษาพลวัตและวิวัฒนาการเชิงคาบของกัมมันตภาพแม่เหล็กในระยะยาวของดาวฤกษ์แม่ จากพฤติกรรมการแปรผันของสัญญาณจุดมืดและรูปแบบการกระจายตัวของเฟสเกาะกลุ่มตลอดช่วงเวลาสังเกตการณ์ 4 ปี

วิธีการดำเนินงาน

1. การรวบรวมและเตรียมข้อมูล

นำเข้าข้อมูลกราฟแสง ความละเอียดเวลาช่วงยาวของดาวฤกษ์ Kepler-17 จากฐานข้อมูลสาธารณะ MAST (Mikulski Archive for Space Telescopes) ครอบคลุมระยะเวลาการสังเกตการณ์ตั้งแต่ Quarter 1 ถึง 17 ของกล้องโทรทรรศน์อวกาศเคปเลอร์ โดยประมวลผลผ่านแพ็คเกจ lightcurve ในภาษา Python ข้อมูลดิบถูกนำมาผ่านกระบวนการจัดแนวโน้มแปรปรวนระยะยาวด้วยวิธี Savitzky-Golay filter เพื่อกำจัดสัญญาณรบกวนที่เกิดจากการหมุนรอบตัวเองของดาวฤกษ์และการแปรผันเชิงระบบ จากนั้นทำการคำนวณเฟส โดยอ้างอิงค่าคาบการโคจรและจุดกึ่งกลางการบดบังของดาวเคราะห์ Kepler-17b เพื่อจัดระเบียบให้ข้อมูลการผ่านหน้าในทุกรอบโคจรมาซ้อนทับกันบนฐานเวลาเดียวกัน

2. สร้างแบบจำลองการผ่านหน้าและการสกัดสัญญาณ

การแยกสกัดสัญญาณกัมมันตภาพของจุดมืดออกจากกราฟแสงปกติ อาศัยการเปรียบเทียบข้อมูลสังเกตการณ์จริงกับแบบจำลองทางทฤษฎี โดยผู้วิจัยใช้แพ็คเกจ batman (BASIC TRANSIT MODEL cALCULATION) ในการคำนวณแบบจำลองการผ่านหน้าอ้างอิงสถานะที่ไม่มีจุดมืด โดยกำหนดพารามิเตอร์คงที่ของระบบตามมาตรฐานทางดาราศาสตร์ ควบคู่กับการใช้โมเดลขอบมืดดาวฤกษ์แบบกัลลิ่งสอง หลังจากนั้นทำการหาค่าแบบจำลองออกจากข้อมูลจริงเพื่อคำนวณหา "สัญญาณส่วนต่างตกค้าง" ซึ่งอิทธิพลการบดบังจุดมืดของดาวเคราะห์จะปรากฏในลักษณะยอดนูนแหลมเหนือระดับฐานศูนย์

3. การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยแบบจำลองเบย์เซียน

เพื่อประเมินลักษณะทางกายภาพของจุดมืดด้วยความแม่นยำทางสถิติ ผู้วิจัยได้จำลองรูปร่างของสัญญาณตกค้างด้วยฟังก์ชันการแจกแจงแบบปกติ (Gaussian Profile):

$$f(\phi) = A \exp\left(-\frac{(\phi - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

โดยกำหนดให้ A คือแอมพลิจูดความเข้มแสง, μ คือตำแหน่งของเฟส และ σ คือความกว้างของจุดมืด

เพื่อหาค่าแอมพลิจูดความเข้มแสง ตำแหน่ง และความกว้าง โดยประยุกต์ใช้แบบจำลองเบย์เซียนผ่านอัลกอริทึม MCMC ด้วยแพ็คเกจ emcee กระบวนการสุ่มใช้ Walkers 32 ตัว รันซ้ำ 5,000 รอบ ผลลัพธ์ของพารามิเตอร์ถูกสกัดจากการแจกแจงความน่าจะเป็นภายหลัง พร้อมระบุค่าความคลาดเคลื่อน

4. การวิเคราะห์โครงสร้างมหภาคและการเปรียบเทียบแบบจำลองเชิงสถิติ

เพื่อพิสูจน์ความต่อเนื่องทางฟิสิกส์ในระยะยาวและแก้ข้อจำกัดของข้อมูลที่มีความละเอียดต่ำสัมผัส ผู้วิจัยได้ดำเนินการเพิ่มเติม 2 ส่วนหลัก:

1. แผนภูมิสายน้ำ (River Plot): นำสัญญาณตกค้างตลอด 17 Quarters มาเรียงต่อกันตามลำดับเวลาในแกนตั้ง และเรียงตามเฟสการโคจรในแกนนอน เพื่อสร้างแผนภูมิความหนาแน่นเชิงพื้นที่ ติดตามวิวัฒนาการและการเคลื่อนตัวของกลุ่มจุดมืด
2. การวิเคราะห์กลุ่มข้อมูลเฟส : ทำการรวบรวมข้อมูลสัญญาณตกค้าง ในช่วงฤดูกาลกัมมันตภาพสูง เข้าด้วยกันเพื่อเพิ่มความหนาแน่นทางสถิติ จากนั้นยุบรวมข้อมูลเป็นถึงข้อมูลเฟสจำนวน 40 ถึง เพื่อคำนวณดัชนีชี้วัด Akaike Information Criterion (AIC) และ Bayesian Information Criterion (BIC) เปรียบเทียบระหว่างแบบจำลอง No-Spot และ With-Spot ในการพิสูจน์ความแตกต่างของสัญญาณฟลิกส์แยกออกจากสัญญาณรบกวนสุ่ม

5. ประเมินอุณหภูมิทางกายภาพด้วยวิธีมอนเตคาร์โล

นำค่าพารามิเตอร์แอมพลิจูดสัญญาณสูงสุด ที่ผ่านการปรับฐานสเกลสมบูรณทางฟลิกส์แล้ว มาคำนวณเพื่อหาค่าอุณหภูมิภายในจุดมืด โดยมีความสัมพันธ์เชื่อมโยงกับความลึกของการผ่านหน้าปกติ และอุณหภูมิผิวโฟโตสเฟียร์ปกติของดาวฤกษ์แม่ ตามกฎการแผ่รังสีของสเตฟาน-โบลตซ์มันน์ (Stefan-Boltzmann Law) ภายใต้สมการ:

$$T_{spot} = T_{star}(1 - C)^{1/4}$$

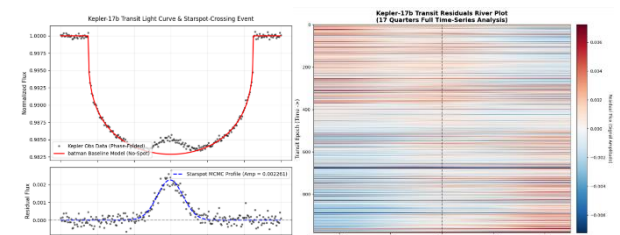
ผู้วิจัยได้ประยุกต์ใช้เทคนิคการจำลองมอนเตคาร์โลเพื่อกระจายความคลาดเคลื่อน ทำการสุ่มพารามิเตอร์อินพุตตามการแจกแจงแบบปกติจำนวน 100,000 ครั้ง เพื่อสกัดค่าเฉลี่ยอุณหภูมิภายในจุดมืด สัมบูรณ์และส่วนต่างความเย็นค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเชิงสถิติที่แม่นยำ

ผลและอภิปรายผล

1. สัญญาณตกค้างและการวิเคราะห์โครงสร้างมหภาคด้วยแผนภูมิสายน้ำ

จากการสร้างแบบจำลองการผ่านหน้าทางทฤษฎีอ้างอิงสภาวะที่ไม่มีจุดมืดและนำมาหักล้างกับข้อมูลกราฟแสงสังเกตการณ์จริง พบว่าปรากฏสัญญาณส่วนต่างที่แสดงลักษณะเป็นยอดนูนเหนือระดับฐานศูนย์ ในระหว่างที่ดาวเคราะห์โคจรผ่านหน้าดวงดาว

เพื่อพิสูจน์เสถียรภาพและความต่อเนื่องทางกายภาพ ผู้วิจัยได้นำสัญญาณตกค้างส่วนต่างตลอดระยะเวลา 4 ปี มาจัดเรียงซ้อนทับกันตามลำดับเวลาในแผนภูมิสายน้ำ (River Plot) ดังแสดงใน ภาพที่ 1 ผลการวิเคราะห์เผยให้เห็นแถบสัญญาณเชิงบวกความหนาแน่นสูง (แถบสีแดงเข้มที่มีแอมพลิจูดสูงถึง 0.006) เกาะกลุ่มและทอดตัวสอดคล้องตามแนวแกนหมุนของดาวฤกษ์อย่างต่อเนื่อง โครงสร้างนี้เป็นหลักฐานยืนยันชัดเจนว่าสัญญาณตกค้างดังกล่าวเกิดจากพื้นที่กัมมันตภาพ ของกลุ่มจุดมืดขนาดใหญ่ที่มีอายุชัวยาวนานข้ามผ่านหลาย



ร้อยรอบโคจร ไม่ใช่สัญญาณรบกวนสุ่ม

ภาพที่ 1.1: (บน) กราฟแสงการผ่านหน้าสัมพันธ์ของดาวเคราะห์ Kepler-17b เปรียบเทียบกับแบบจำลองทฤษฎีสภาวะปกติ และ (ล่าง) สัญญาณส่วนต่างตกค้างที่ผ่านการสกัดและครอบทับพารามิเตอร์จุดมืดด้วยวิธี MCMC

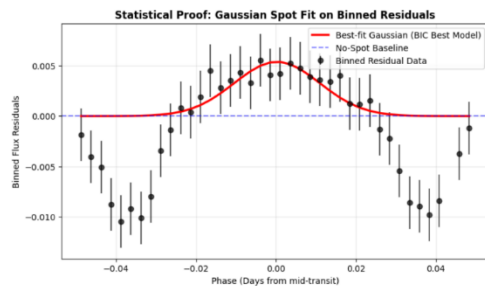
ภาพที่ 1.2: แผนภูมิสายน้ำ (River Plot) แสดงการกระจายตัวและการวิวัฒนาการของสัญญาณจุดมืดสัมพันธ์ตลอด 17 Quarters ของระบบดาว Kepler-17

2. การพิสูจน์ทางสถิติและพฤติกรรมโครงสร้างปีกนก

เพื่อเพิ่มอัตราส่วนสัญญาณต่อสัญญาณรบกวน และจำกัดข้อจำกัดของข้อมูลช่วงเวลานาน ผู้วิจัยได้ใช้เทคนิคการจัดกลุ่มถึงข้อมูลเฟส ในการทดสอบเปรียบเทียบแบบจำลองทางสถิติ ดังแสดงใน ภาพที่ 2 โดย

ผลการแจกแจงของถังข้อมูลดิบ เผยให้เห็นโครงสร้างรูปทรงสมมาตรคล้ายปีกนก (W-Shape Profile) ซึ่งแบบจำลองเกาส์เซียน สามารถครอบคลุมข้อสังเกตที่เป็นสภาวะบดบังจุดมืดสมบูรณ์ตรงจุดกึ่งกลางเฟส ได้อย่างมีนัยสำคัญ

ทว่า ปรากฏร่องรอยการรบกวนตัวของสัญญาณลงต่ำกว่าระดับฐานศูนย์ บริเวณส่วนปีกทั้งสองข้างอย่างสมมาตร โครงสร้างรูปตัว W นี้ถือเป็นหลักฐานเชิงประจักษ์ทางฟิสิกส์ดาราศาสตร์ที่สะท้อนถึงอิทธิพลตกค้างจากการปรับแก้ขอบมืดดาวฤกษ์ ควบคู่กับพลวัตการขยับเลื่อนตำแหน่งเฟสของจุดมืดตลอดช่วงเวลารวมรวบรวมข้อมูล



ภาพที่ 2: การกระจายตัวของสัญญาณตกค้างแบบจัดถึงข้อมูลเฟส เผยให้เห็นลักษณะโครงสร้างรูปทรงปีกนก (W-Shape) เปรียบเทียบกับแบบจำลองเกาส์เซียน

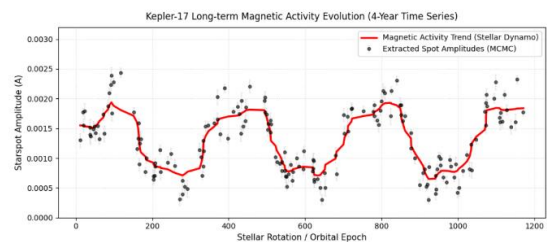
3.การวิเคราะห์พารามิเตอร์เชิงฟิสิกส์และอุณหภูมิผิวสัมผัส

พารามิเตอร์ทางกายภาพ	ค่าที่ประเมินได้	หน่วย
อุณหภูมิผิวโฟโตสเฟียร์ปกติ	5631 ± 55	เคลวิน
แอมพลิจูดสัญญาณจุดมืดสูงสุด	0.002261 ± 0.000066	สัดส่วนแสง
อุณหภูมิเฉลี่ยภายในเนื้อจุดมืด	5435.1 ± 53.5	เคลวิน
ส่วนต่างความเย็นสัมผัสผิวดาว	195.9	เคลวิน

ตารางที่ 1: สรุปพารามิเตอร์ทางกายภาพและอุณหภูมิของจุดมืดบนดาวฤกษ์ Kepler-17 จากข้อมูลสังเกตการณ์จากการประเมินทางฟิสิกส์ระบุว่า จุดมืดบนดาวฤกษ์ Kepler-17 มีอุณหภูมิต่ำกว่าพื้นผิวปกติสัมผัสประมาณ 196.9 K สอดคล้องกับธรรมชาติทางทฤษฎีของดาวฤกษ์ประเภท G-type ในแถบลำดับหลักอย่างสมบูรณ์แบบยืนยันทันถึงสภาวะทางกายภาพที่สนามแม่เหล็กความเข้มสูงเหนี่ยวนำให้เกิดการยับยั้งการพาความร้อน ส่งผลให้พื้นที่ดังกล่าวปลดปล่อยพลังงานลดลงและเกิดเป็นพื้นที่อุณหภูมิต่ำบนผิวดาว

4. พลวัตและการวิวัฒนาการระยะยาวของวัฏจักรกัมมันตภาพแม่เหล็ก 4 ปี

เมื่อทำการขยายผลสกัดพารามิเตอร์แอมพลิจูดจุดมืดแยกเป็นรายคาบรอบโคจรต่อเนื่องกันยาวนาน 4 ปี และนำมาจัดทำอนุกรมเวลา ดังภาพที่ 3



ภาพที่ 3: อนุกรมเวลาตลอด 4 ปีแสดงความผันแปรของแอมพลิจูดจุดมืด และเส้นแนวโน้มกัมมันตภาพแม่เหล็ก

ผลการวิเคราะห์ระบุรูปแบบการแกว่งตัวของกัมมันตภาพผิวดาวที่มีลักษณะเป็นคาบระยะสั้น) สลับกับช่วงขบเซา และช่วงรุ่งเรือง พฤติกรรมเชิงพลวัตนี้เป็นหลักฐานเชิงประจักษ์ขั้นสูงที่ชี้ให้เห็นถึงอิทธิพลของ กลไกไดนาโมภายในดาวฤกษ์ร่วมกับการหมุนรอบตัวเองแบบอนุพันธ์ ซึ่งเป็นกลไกหลักที่ควบคุมการเกิด-ดับและจัดระเบียบโครงสร้างสนามแม่เหล็กในดาวฤกษ์ประเภทที่มีกัมมันตภาพแม่เหล็กสูง

สรุปผล

จากการดำเนินโครงการวิจัยนี้ ผู้วิจัยประสบความสำเร็จในการสกัดและประเมินคุณลักษณะทางกายภาพร่วมกับพลวัตระยะยาวของจุดมืดบนดาวฤกษ์ Kepler-17 ผ่านข้อมูลกราฟแสงการผ่านหน้าตลอดระยะเวลา 4 ปี ผลการวิเคราะห์ด้วยแบบจำลองเบย์เซียน MCMC ระบุว่า สัญญาณจุดมืดมีค่าแอมพลิจูดความเข้มแสงส่วนต่างสูงสุดเท่ากับ 0.002261 ± 0.000066 ซึ่งเมื่อนำมาประเมินร่วมกับการกระจายความคลาดเคลื่อนด้วยวิธีจำลองมอนเตคาร์โล ภายใต้กฎสเตฟาน-โบลตซ์มันน์พบว่า อุณหภูมิเฉลี่ยภายในเนื้อจุดมืดสมบูรณ์มีค่าเท่ากับ 5435.1 ± 53.5 K โดยมีส่วนต่างความเย็นต่ำกว่าผิวปกติของดาวฤกษ์แม่สัมพันธ์ประมาณ 195.9 K ยืนยันถึงสถานะที่สนามแม่เหล็กความเข้มสูงเข้ายับยั้งการพาความร้อนอย่างมีนัยสำคัญ นอกจากนี้ เทคนิคการจัดกลุ่มถึงข้อมูลเฟส ยังเผยให้เห็นร่องรอยสัญญาณตกค้างรูปทรงสมมาตรคล้ายปีกนก ซึ่งสะท้อนถึงอิทธิพลร่วมระหว่างการปรับแก้ขอบมืดดาวฤกษ์ และพลวัตการขยับเลื่อนตำแหน่งเฟสของจุดมืด สอดคล้องกับผลจากแผนภูมิสายน้ำที่แสดงการเกาะกลุ่มของพื้นที่กัมมันตภาพ ในแนวตั้งข้ามผ่านหลายร้อยรอบโคจรอย่างมีเสถียรภาพ เมื่อนำพารามิเตอร์จุดมืดมาวิเคราะห์แบบอนุกรมเวลาตลอดระยะเวลา 4 ปี พบรูปแบบการแกว่งตัวขึ้นลงอย่างเป็นระบบ บ่งชี้ถึงรอบวัฏจักรกัมมันตภาพแม่เหล็กระยะสั้นที่ถูกขับเคลื่อนด้วยกลไกไดนาโมภายในดาวฤกษ์ และการหมุนแบบอนุพันธ์

สรุปได้ว่าระเบียบวิธีวิจัยนี้มีประสิทธิภาพและความแม่นยำสูงในการศึกษาพฤติกรรมทางกายภาพของดาวฤกษ์ ซึ่งบรรลุลำดับประสงคของโครงการที่ตั้งไว้ทุกประการ
กิตติกรรมประกาศ

การวิจัยครั้งนี้สามารถดำเนินการจนประสบความสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี เนื่องจากได้รับความอนุเคราะห์และสนับสนุนเป็นอย่างดีจาก คุณณภาพร อทะโน สถาบันวิจัยดาราศาสตร์แห่งชาติ (องค์การมหาชน) สำหรับคำแนะนำ Python batman และคุณสิริวิมล วังวษ์ที่ให้คำแนะนำการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

เอกสารอ้างอิง

- Estrela, R., & Valio, A. (2016). Stellar Magnetic Cycles in the Solar-like Star Kepler-17. *The Astrophysical Journal*. 831(1): 57.
- Foreman-Mackey, D., Hogg, D. W., Lang, D., & Goodman, J. (2013). emcee: The MCMC Hammer. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*. 125(925): 306.
- Valio, A., Estrela, R., Trevisan, M., et al. (2017). Starspots on Kepler-17: Activity and Differential Rotation. *The Astrophysical Journal*. 835(2): 278.