



ผลรวมตัวหารแบบจำกัด: ฟังก์ชัน $\sigma_S(n)$ และจำนวนสมบูรณ์เชิงเซต

บาซิล หวังกุลหล้า อนุภาพ มะรอเซ และรุฮายา เจะเลาะ

โรงเรียนวิทยาศาสตร์จุฬาราชวิทยาลัยสตูล, ตำบล ฌลุง อำเภอเมืองสตูล สตูล 91140 ประเทศไทย

Email: anuphap.m@pccst.ac.th

บทคัดย่อ

ฟังก์ชันผลรวมตัวหาร $\sigma(n) = \sum d$ ซึ่งนับรวมตัวหาร d ทั้งหมดของ n เป็นรากฐานของแนวคิดจำนวนสมบูรณ์มาตั้งแต่สมัยยุคคิดโครงงานนี้ตั้งคำถามว่าหากจำกัดการนับรวมเฉพาะตัวหารที่มีสมบัติตามเซตเงื่อนไขโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ใดจะปรากฏขึ้นงานนี้นิยามฟังก์ชัน $\sigma_S(n) = \sum_{d|n, d \in S} d$ และเรียก n ว่า "S สมบูรณ์" เมื่อ $\sigma_S(n) = 2n$ แนวคิดนี้ก่อให้เกิดระบบจำนวนสมบูรณ์เชิงเซต (set-perfect numbers) ที่มีพฤติกรรมหลากหลาย งานนี้ยังสร้างกรอบทฤษฎีรวมผ่านเกณฑ์ภาวะการคูณ (ทฤษฎีบท 2.4) ที่จำแนกประเภทของเซต S ที่ทำให้ σ_S เป็น multiplicative function และอนุมานสูตรปิดสำหรับเซต S จำนวน 8 แบบ รวมถึงเซตสี่อูว์ล $S_\lambda = \{d : \Omega(d) \text{ เป็นเลขคู่}\}$ ซึ่งเป็นผลงานใหม่ในโครงงานนี้ ผลการศึกษาหลักสามประการ ประการแรก สามารถพิสูจน์ได้ว่า $n = 6$ เป็น S_b -สมบูรณ์เพียงตัวเดียวโดย S_b คือเซตตัวหารปอดกำลังสองบทพิสูจน์อาศัยเพียงการวิเคราะห์จำนวนเฉพาะมากที่สุดของ n และการนับกำลังของ 2 เพียงเครื่องมือเดียว ประการที่สอง ขอบเขต $\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{\pi^2}{6} \approx 1.645 < 2$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ ซึ่งได้จากเอกลักษณ์ผลคูณออยเลอร์ แสดงให้เห็นว่าไม่มีจำนวน $S_\square$ -สมบูรณ์หรือ $S_\square$ -เพอร์เฟกต์ตัวเดียว เชื่อมโยงกับการแก้ปัญหาบาเซลประการที่สามการมีอยู่ของจำนวน Sodd สมบูรณ์สมมูลกับการมีอยู่ของจำนวนสมบูรณ์คี่ ซึ่งยังคงเป็นปัญหาเปิดที่เป็นที่รู้จักในทฤษฎีจำนวน นอกจากนี้โครงงานยังนำเสนอข้อคาดการณ์ใหม่ 5 ข้อที่ตรวจสอบเชิงคำนวณสำหรับ $n \leq 3 \times 10^6$ รวมถึงข้อคาดการณ์ว่า $n = 6$ เป็นจำนวนเดียวที่ $\sigma_b(n) = kn$ สำหรับ $k \geq 2$ และความหนาแน่นเชิงธรรมชาติของ S_b เพื่อซึ่งประมาณ 0.055 รูปแบบเชิงคำนวณเหล่านี้ชี้แนะสู่แนวทางการพิสูจน์ที่น่าสนใจสำหรับงานวิจัยต่อยอด ผลงานนี้แสดงให้เห็นว่าการปรับเปลี่ยนเงื่อนไขการนับตัวหารเพียงเล็กน้อยสามารถเปิดประตูสู่โครงสร้างทางทฤษฎีจำนวนที่อุดมสมบูรณ์เชื่อมโยงกับปัญหาเปิดหลายข้อในคณิตศาสตร์ระดับสากลและพิสูจน์ว่าจำนวนสมบูรณ์เชิงเซตในแต่ละรูปแบบมีพฤติกรรมที่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

คำสำคัญ: ผลรวมตัวหาร, จำนวนสมบูรณ์เชิงเซต, ฟังก์ชัน multiplicative, ทฤษฎีจำนวน, จำนวนสมบูรณ์คี่