



ผลรวมตัวหารแบบจำกัด: ฟังก์ชัน $\sigma_5(n)$ และจำนวนสมบูรณ์เชิงเซต

Restricted Divisor Sums: The Function $\sigma_5(n)$ and Set-Perfect Numbers

บาซิล หวังกุลหล้า อนุภาพ มะร่อเซะ

รุธาया เจะเลาะ

โรงเรียนวิทยาศาสตร์จุฬาราชวิทยาลัยสตูล, ตำบล หนอง อำเภอมือเมืองสตูล สตูล 91140 ประเทศไทย

Email: anuphap.m@pccst.ac.th

บทคัดย่อ

โครงการนี้นำเสนอการนิยามและศึกษาฟังก์ชันผลรวมตัวหารแบบจำกัด σ_5 โดยที่ $\sigma_5(n)$ คือผลรวมของตัวหาร d ทั้งหมดที่หาร n และ d อยู่ในเซตเงื่อนไข S งานนี้สร้างกรอบทฤษฎีผ่านเกณฑ์ภาวะการคูณ (ทฤษฎีบท 2.4) หาสูตรปิดของ σ_5 สำหรับเซต S จำนวน 10 แบบและนิยามจำนวนแบบและนิยามจำนวนสมบูรณ์เชิงเซตว่าคือจำนวนเต็มบวก n ซึ่งทำให้ $\sigma_5(n)=2n$ ผลลัพธ์หลักสามประการ ได้แก่ ทฤษฎีบทเอกพจน์ว่า $n=6$ เป็นจำนวน S_6 สมบูรณ์เพียงตัวเดียวโดยการวิเคราะห์จำนวนเฉพาะมากที่สุดในรูปแบบ 2-adic ทฤษฎีบทสองแสดงว่า $\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{\pi^2}{6} \approx 1.645$ เสมอจึงไม่มีจำนวน S_6 สมบูรณ์แม้แต่ตัวเดียวซึ่งเชื่อมกับปัญหาบาเซลทฤษฎีบทสาม: การมีอยู่ของ S_{odd} สมบูรณ์สมมูลกับการมีอยู่ของจำนวนสมบูรณ์คือ นอกจากนี้โครงการยังเสนอข้อคาดการณ์ใหม่ 5 ข้อซึ่งตรวจสอบเชิงคำนวณสำหรับ $n \leq 3 \times 10^6$

คำสำคัญ: ผลรวมตัวหาร, จำนวนสมบูรณ์เชิงเซต, ฟังก์ชัน multiplicative, ทฤษฎีจำนวน, จำนวนสมบูรณ์คือ
จะเกิดอะไรขึ้นถ้าจำนวนตัวหารที่มีสมบัติพิเศษ

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

ฟังก์ชันผลรวมตัวหาร $\sigma(n) = \sum d$ นับรวมตัวหาร d ทั้งหมดของ n เป็นรากฐานของจำนวนสมบูรณ์ เช่น $\sigma(6)=12=2 \times 6$ คำถามตั้งต้นของโครงการคือ

บางอย่างเท่านั้นแนวคิดนี้นำไปสู่ฟังก์ชัน $\sigma_5(n)$ และระบบจำนวนสมบูรณ์เชิงเซตที่หลากหลายแบบมีโครงสร้างที่งดงามและสามารถพิสูจน์ได้อย่างสมบูรณ์โดยใช้เครื่องมือทางทฤษฎีจำนวนในขณะที่บางแบบเชื่อมโยงกับปัญหาเปิดระดับโลกที่ยังไม่ได้รับการแก้ไข

1.2 วัตถุประสงค์

- 1) สร้างนิยามที่ของ $\sigma_s(n)$ จำนวนสมบูรณ์เชิงเซต
- 2) พิสูจน์เงื่อนไข multiplicativity และหาสูตรปิดสำหรับ S แต่ละแบบ
- 3) ค้นหาและพิสูจน์ความเป็นเอกลักษณ์และความไม่มีอยู่ของจำนวน S -สมบูรณ์
- 4) ตรวจสอบข้อคาดการณ์ใหม่ด้วยการคำนวณถึง $n=3 \times 10^6$

1.3 สมมติฐาน

- เมื่อ S เป็น local property ฟังก์ชัน σ_s จะเป็น multiplicative มีสูตรปิดในรูปผลคูณ
- จำนวน S -สมบูรณ์มีจำนวนจำกัดเพราะ $\sigma_b(n)/n$ ถูกควบคุมด้วยปัจจัยลู่อู่เข้า
- เซตที่มีเงื่อนไขแบบ global เช่น $d \leq \sqrt{n}$ จะทำลายสมบัติ multiplicativity ของ σ_s

1.4 ขอบเขตการศึกษา

- ศึกษาบนจำนวนเต็มบวกด้วยเครื่องมือทางทฤษฎีจำนวนเชิงคูณและการคอนโวลูชันดิริชเลต์ในระดับสอวน. ค่าย 2
- พิจารณาเซตเงื่อนไข S จำนวน 10 แบบแตกต่างกันและตรวจสอบเชิงคำนวณสำหรับ $n \leq 3 \times 10^6$

2. นิยาม ทฤษฎีบทพื้นฐาน

และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 นิยามสำคัญ

นิยาม 2.1 (ฟังก์ชันผลรวมตัวหารแบบจำกัด)

กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวกและให้ $S(n)$ เป็นเซตย่อยของเซตตัวหารทั้งหมดของ n ฟังก์ชัน σ_s ถูกนิยามโดย:

$$\sigma_s(n) = \sum_{d \mid n, d \in S(n)} d$$

นิยาม 2.2 (จำนวนสมบูรณ์/เพื่อ/พร่องเชิงเซต)

n เป็น S -สมบูรณ์เมื่อ $\sigma_s(n)=2n$; S -เมื่อ $>2n$; S -พร่องเมื่อ $<2n$

นิยาม 2.3 (สมบัติเชิงตัวประกอบ) S เป็น local property ถ้ามีความสัมพันธ์ R ซึ่ง $d \in S(n)$ iff $\forall p: (v_p(d), v_p(n))$ in Real number

2.2 ทฤษฎีบทเกณฑ์ภาวะการคูณ

ทฤษฎีบท 2.4 (เกณฑ์ภาวะการคูณ) เซต S ที่เป็น local property ด้วยความสัมพันธ์ R ทำให้ σ_s เป็น multiplicative function (ฟังก์ชันการคูณ)

กล่าวคือ $\sigma_s(mn) = \sigma_s(m) \cdot \sigma_s(n)$ สำหรับทุก m, n ที่ $\gcd(m, n) = 1$ โดยค่าที่กำลังเฉพาะ p^a คำนวณได้จาก:

$$\sigma_s(p^a) = \sum_{(i,a) \in R} p^i$$

2.3 เซต S 10 แบบ

เซต S	สูตร $\sigma_s(p^a)$ / ตัวอย่าง	สมบัติ
เฉพาะ (β)	d prime; $\beta(n)=\sum p$	Additive
คี่	d คี่; σ (ส่วนคี่ n)	Mult.
กำลังสอง	$d=\square$; $(p^{2k+2}-1)/(p^2-1)$	Mult.
$d \leq \sqrt{n}$	$d \leq \sqrt{n}$; ไม่มีสูตรปิดทั่วไป	—
เอกฐาน (*)	$\gcd(d, n/d)=1$; $1+p^a$	Mult.
ปลอด $\square$ (b)	$\mu(d) \neq 0$; $\sigma_b(n)=\prod(1+p)$	Mult.
$\phi(d)$ คู่	$d \geq 3$; $\sigma(n)-1-2[2 n]$	ลดรูปได้
$\Omega(d)$ คู่	ลิววีล; $(\sigma(n)+L(n))/2$	เฉลี่ย Mult.

เซตใหม่ที่นำเสนอในโครงการงาน; $\gcd(d, n/d)=1$

จัดเป็นตัวหารเอกฐาน

2.4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ทฤษฎีบททฤษฎีการคูณของลอว์เป็นรากฐานของทฤษฎีจำนวนสมบูรณ์(Hardy&Wright,2008) ฟังก์ชัน $\sigma^*(n)$ ตัวหารเอกฐานศึกษาโดย Cohen(1960) จำนวนสมบูรณ์เชิงเอกฐาน 5 ตัวแรกถูกศึกษาโดย Subbarao & Warren(1966) และ Wall(1975) bi-unitary perfect number 3 ตัวถูกศึกษาโดย Wall(1972) ส่วนลำดับ $\beta(n)$ และ $\prod(1+p)$ ปรากฏในOEISA008472และA048250 ตามลำดับความแปลกใหม่ของโครงการงานนี้มี

สามประการ:การรอบทฤษฎีรวม

(ทฤษฎีบท2.4) บทพิสูจน์เอกลักษณ์ S_b แบบ

สมบูรณ์และการเชื่อมโยงอย่างเป็นระบบกับปัญ

หาเปิดคลาสสิก

3. วิธีดำเนินงาน

1. ทบทวนทฤษฎีฟังก์ชันเลขคณิตเชิงคูณและการคอนโวลูชันดิริชเลต์
2. กำหนดนิยาม σ_s และจำนวนสมบูรณ์เชิงเซตอย่างเป็นทางการ (หัวข้อ 2)
3. พิสูจน์ทฤษฎีบท 2.4 อนุมานสูตรปิดของ σ_s ทั้ง 10 เซต
1. เขียน Python สำหรับคำนวณ $\sigma_s(n)$ ค้นหาจำนวน S-สมบูรณ์ถึง $n=3 \times 10^6$ และวิเคราะห์สถิติ
2. ตั้งข้อคาดการณ์จากรูปแบบที่พบแล้วพิสูจน์

4. ผลการศึกษา

$$\sigma_b(n) = \prod_{p|n} (1 + p) = ((\mu^2 \cdot \text{Id}) * 1)(n)$$

บทตั้ง 4.1.2 (ตัวหารเอกฐาน)

$\sigma_*(n) = \prod_{p|n} (1+p^a)$ เป็น multiplicative ซึ่งเป็นทฤษฎีที่ทราบแล้ว (Cohen, 1960) จำนวน S_* -สมบูรณ์ที่รู้จักได้แก่ 6, 60, 90 และ 87360 (Subbarao & Warren, 1966)

บทตั้ง 4.1.3 (กำลังสอง) $\sigma_{\square}(p^a)$ มีรูปปิดคือ

$$(p^{2\lfloor a/2 \rfloor + 1} - 1) / (p^2 - 1) \text{ สำหรับ } k = \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$$

ส่วน $\sigma_{\text{odd}}(n)$ มีค่าเท่ากับ $\sigma(m)$ เมื่อ m คือส่วนคี่ของ n ทั้งสองเป็น multiplicative

บทตั้ง 4.1.4 (ผลรวมตัวประกอบเฉพาะ)

$\beta(n) = \sum_{p|n} p$ มีสมบัติเป็น additive function

กล่าวคือ $\beta(mn) = \beta(m) + \beta(n)$

สำหรับทุก m, n ที่ $\gcd(m, n) = 1$ แต่ไม่เป็น multiplicative

บทตั้ง 4.1.5 (เซตลิววีล — ผลงานใหม่ในโครงการนี้)

กำหนด $S_\lambda = \{d: \Omega(d) \text{ เป็นเลขคู่}\}$ โดย $\Omega(d)$ คือจำนวนตัวประกอบเฉพาะของ d นับซ้ำ

สูตรปิดของ σ_{S_λ} ที่ได้จากการแยกฟังก์ชันลิววีลมีรูปดังนี้:

$$\sigma_{S_\lambda}(n) = \frac{\sigma(n) + L(n)}{2}, \quad L(n) = \frac{1 - (-p)^{a+1}}{1 + p}$$

4.1 ข้อคาดการณ์ใหม่

- (C1) $\prod(1+p)=kn$ ไม่มีคำตอบเมื่อ $k \geq 3$ จากการตรวจสอบถึง 3×10^6
- (C2) ไม่มีจำนวน S_{odd} สมบูรณ์ แม้แต่ตัวเดียวและได้ว่า(สมมูลกับ:ไม่มีจำนวนสมบูรณ์คี่)
- (C3) ไม่มีจำนวน S_λ -สมบูรณ์ ($\Omega(d)$ คู่) ตรวจสอบถึง 3×10^5
- (C4) มีจำนวน S_b เพื่ออยู่เป็นจำนวนอนันต์โดยมีความหนาแน่นเชิงธรรมชาติโดยประมาณ $\delta \approx 0.055$

- (C5) $n=6$ เป็นจำนวนเดียวที่ $\sigma_b(n)=kn$ สำหรับ $k \geq 2$ (รวมทฤษฎีบท 4.2.1)

4.2 ตารางสรุปจำนวน S-สมบูรณ์

เซต S	จำนวน S-สมบูรณ์	ตรวจสอบ n
ปอด □ (b)	6 เท่านั้น (พิสูจน์แล้ว)	$< 2 \times 10^6$
เอกฐาน (*)	6, 60, 90, 87360	$< 2 \times 10^5$
กำลังสอง (□)	ไม่มีเลย (พิสูจน์แล้ว)	$\forall n$
คี่	ไม่พบ	$< 5 \times 10^5$
$\Omega(d)$ คู่ (S_λ) ★	ไม่พบ	$< 3 \times 10^5$
$\sigma(n)$ ปกติ	6, 28, 496, 8128	$< 10^4$

5. การทดลองด้วยคอมพิวเตอร์

ผลการทดลองสรุป:จำนวน squarefreeperfect คือ {6}

เพียงตัวเดียว (ยืนยัน $n < 2 \times 10^6$) จำนวน

square-perfect ไม่มีเลย

เนื่องจาก $\max \text{ratio} = 1.552 < \frac{\pi^2}{6}$ จำนวน

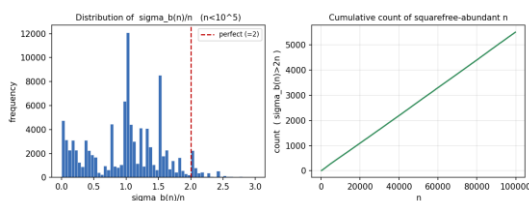
odd-divisor-perfect ไม่พบ ($n < 5 \times 10^5$) จำนวน

S_λ -perfect ไม่พบ ($n < 3 \times 10^5$) พบจำนวน

S_b -เพื่อจำนวน 5505 ตัวในช่วง 10^5 แรก คิดเป็น 5.5%

โดย S_b -เพื่อน้อยสุดคือ 30 และ S_b -เพื่อน้อยสุดคือ

$$15015 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$$



ภาพที่ 1: การกระจายของ $\frac{\sigma_b(n)}{n}$ (ซ้าย)
และจำนวนสะสม S_b - (ขวา), $n < 10^5$

6. อภิปรายผล

ทฤษฎีบท 4.2 ทำหน้าที่เป็นแกนกลางในการอธิบายว่าเหตุใดเซตที่มีสมบัติเชิงตัวประกอบ เช่น เซตตัวหารตลอดกำลังสองตัวหารเอกฐาน, ตัวหารกำลังสอง และตัวหารคี่ จึงให้ฟังก์ชัน σ_s ที่เป็น multiplicative ในขณะที่เซต global เช่น $d \leq \sqrt{n}$ หรือเซตที่นิยามผ่านเลขชี้กำลังรวม $\Omega(d)$ จะไม่มีสมบัตินี้

ทฤษฎีบทเอก 4.2.1 มีความงามตรงที่บทพิสูจน์อาศัยเพียงการนับกำลังสองและการวิเคราะห์จำนวนเฉพาะมากที่สุดซึ่งอยู่ในของนักเรียนระดับมัธยมปลาย ส่วนทฤษฎีบท 4.3.1 เชื่อมกับ $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ อันเป็นคำตอบของปัญหาบาเซล และทฤษฎีบท 4.4 เชื่อมโยงปัญหาจำนวนสมบูรณ์คี่ที่ยังเป็นปัญหาเปิดในปัจจุบัน

ข้อจำกัดของงาน: ข้อคาดการณ์ C1C4 ยังไม่มีบทพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มีเพียงหลักฐานเชิงคำนวณเท่านั้น ผลที่เกี่ยวข้องกับตัวหารเอกฐานเป็นการยืนยันทฤษฎีที่ทราบแล้วไม่ใช่ผลใหม่ และเซต $d \leq \sqrt{n}$ รวมถึงเซต $d \equiv 1 \pmod{m}$ ยังไม่ได้รับการศึกษาอย่างครบถ้วน

ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยต่อยอด:

- (1) พิสูจน์ข้อคาดการณ์ C1 ด้วยการวิเคราะห์ abundance index และฟังก์ชัน Euler product
- (2) ขยายกรอบทฤษฎีบท 2.4 ไปยังเซตที่นิยามผ่านกราฟหารลงตัว (divisor graph)
- (3) ศึกษาฟังก์ชันนับ $Ab(x)$ สำหรับ S_b เพื่อด้วยทฤษฎีบทวินด์เนอร์
- (4) วิเคราะห์เซต $d \leq \sqrt{n}$ ด้วยวิธี analytic number theory

7. สรุปผล

โครงการนี้สร้างกรอบทฤษฎีรวมสำหรับ $\sigma_s(n)$ ผ่านทฤษฎีบท 2.4 อนุমানสูตรปิดสำหรับ 8 เซตและพิสูจน์ผลลัพธ์สำคัญสามประการอย่างสมบูรณ์ ได้แก่

- (1) $n = 6$ เป็น S_b -สมบูรณ์เพียงตัวเดียว
- (2) ไม่มีจำนวน $S_{\square}$ -สมบูรณ์หรือ $S_{\square}$ -เพื่อเนื่องจาก

$$\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{\pi^2}{6} < 2$$

เสมอและ

- (3) การมีอยู่ของ S_{odd} สมบูรณ์สมมูลกับการมีอยู่ของจำนวนสมบูรณ์คี่อันเป็นปัญหาคาสสิกนอกจากนี้ยังนำเสนอ ข้อคาดการณ์ใหม่ 5 ข้อที่ตรวจสอบเชิงคำนวณสำหรับ $n \leq 3 \times 10^6$ ผลงานนี้แสดงให้เห็นว่าการปรับเปลี่ยนกติกาการ นับตัวหารแม้เพียงเล็กน้อยอาจนำไปสู่โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงกับปัญหาคาสสิกหลายข้อ

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณนางสาวรุสยา เจะเลาะครูที่
 ปรึกษาโครงการ คณะครูกลุ่มสาระการเรียนรู้
 คณิตศาสตร์ และคณะผู้บริหารของโรงเรียน
 วิทยาศาสตร์จุฬารัตนวิทยา สดุด ที่คอยสละ
 เวลาให้ความรู้ คำแนะนำ โอกาสอันมีค่าในการ
 นำเสนอผลงานในครั้งนี้แก่กลุ่มของข้าพเจ้า ขอขอบคุณ
 รศ.ดร.กำธร ไชยสิทธิ์ อาจารย์ที่ปรึกษา ที่กรุณาสละ
 เวลาให้คำแนะนำด้านวิชาการ ตรวจสอบความถูกต้อง
 ทางคณิตศาสตร์ และแนะนำแนวทางการเขียนบท
 พิสูจน์ ระดับสูง ซึ่งทำให้โครงการนี้มีความสมบูรณ์
 ยิ่งขึ้น ขอขอบคุณผู้ปกครองที่ให้ความสนใจเสมอมาและ
 เพื่อน ๆ ทุกคนที่ให้การสนับสนุน ช่วยเหลือในการ
 ดำเนินงานรวมถึงช่วยทดสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่
 ใช้ในการวิจัย สุดท้ายนี้คณะผู้จัดทำโครงการหวังเป็น
 อย่างยิ่งว่าโครงการนี้จะมีประโยชน์สำหรับผู้สนใจ
 ศึกษาต่อในด้านทฤษฎีจำนวน ฟังก์ชันเลขคณิต และ
 คณิตศาสตร์เชิงคำนวณต่อไป

เอกสารอ้างอิง

- Apostol, T. M. (1976). Introduction to analytic number theory. Springer-Verlag.
- Cohen, E. (1960). Arithmetical functions associated with the unitary divisors of an integer. Mathematische Zeitschrift, 74, 66-80.
- Hardy, G. H., & Wright, E. M. (2008). An introduction to the theory of numbers (6th ed.). Oxford University Press.
- Ireland, K., & Rosen, M. (1990). A classical introduction to modern number theory (2nd ed.). Springer-Verlag.

- Nathanson, M. B. (2000). Elementary methods in number theory. Springer-Verlag.
- Niven, I., Zuckerman, H. S., & Montgomery, H. L. (1991). An introduction to the theory of numbers (5th ed.). John Wiley & Sons.
- OEIS Foundation. (n.d.). Sequences A048250 and A008472. <https://oeis.org>
- Subbarao, M. V., & Warren, L. J. (1966). Unitary perfect numbers. Canadian Mathematical Bulletin, 9(2), 147-153.
- Wall, C. R. (1972). Bi-unitary perfect numbers. Proceedings of the AMS, 33(1), 39-42.
- Wall, C. R. (1975). The fifth unitary perfect number. Canadian Mathematical Bulletin, 18(1), 115-122.