

การเปรียบเทียบเครือข่ายสมองด้วยทฤษฎีกราฟสเปกตรัม
Comparison of Brain Network Structures Using Spectral Graph Theory

ณฐมน มะลิซ้อน
พริ้มเพรา เพิ่มประยูร

¹โรงเรียนวิทยาศาสตร์จุฬารามราชวิทยาลัย ลพบุรี, ตำบลห้วยโป่ง, อำเภอโคกสำโรง, จังหวัดลพบุรี 15120, ประเทศไทย

*E-mail: 05447@pccl.ac.th

บทคัดย่อ

โครงการนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการประยุกต์ใช้แนวคิดทางคณิตศาสตร์และทฤษฎีกราฟสเปกตรัมในการวิเคราะห์โครงสร้างเครือข่ายสมองจากภาพถ่าย MRI และเพื่อเปรียบเทียบลักษณะความเชื่อมโยงของสมองระหว่างกลุ่มบุคคลปกติและกลุ่มบุคคลที่มีภาวะผิดปกติทางระบบประสาท การดำเนินโครงการใช้ข้อมูลภาพถ่าย MRI ของสมองมนุษย์จากฐานข้อมูลสาธารณะ (www.kaggle.com) จำนวนทั้งหมด 40 คน แบ่งเป็น กลุ่มควบคุม (สมองปกติ) 20 คน และกลุ่มผู้ป่วย (สมองมีภาวะผิดปกติ) 20 คน โดยแบ่งสมองตามบริเวณที่สนใจ (ROI) จากนั้นสร้างแบบจำลองเครือข่ายสมองในรูปแบบกราฟโดยใช้ค่าสหสัมพันธ์ของสัญญาณ fMRI ระหว่าง ROI เพื่อสร้างเมทริกซ์การเชื่อมต่อ (Adjacency Matrix) แทนความสัมพันธ์ระหว่างโหนด แล้วคำนวณเมทริกซ์ลาปลาเซียนของกราฟ (Graph Laplacian) และวิเคราะห์ค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalue) ของเมทริกซ์ Graph Laplacian และค่า Algebraic Connectivity (λ_2) เพื่อใช้เป็นตัวบ่งชี้คุณสมบัติการเชื่อมโยงกันของเครือข่ายสมอง ผลการศึกษาพบว่าค่า Eigenvalue เชิงสเปกตรัมของกลุ่มควบคุมมีค่าเฉลี่ยสูงกว่ากลุ่มผู้ป่วย โดยกลุ่มควบคุมมีค่าเฉลี่ยประมาณ 3.08 ขณะที่กลุ่มผู้ป่วยมีค่าเฉลี่ยประมาณ 2.09 นอกจากนี้ค่า Algebraic Connectivity (λ_2) ของกลุ่มควบคุมมีค่าสูงกว่ากลุ่มผู้ป่วยอย่างชัดเจน ซึ่งแสดงให้เห็นว่าเครือข่ายสมองของกลุ่มควบคุมมีความเชื่อมโยงระหว่างโหนดแน่นหนาและซับซ้อนกว่ากลุ่มผู้ป่วย ในขณะที่กลุ่มผู้ป่วยมีแนวโน้มของโครงสร้างเครือข่ายสมองที่อ่อนแอและบกพร่อง สรุปได้ว่า การวิเคราะห์ความเชื่อมโยงของเครือข่ายสมองด้วยทฤษฎีกราฟสเปกตรัมสามารถใช้เป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ในการวิเคราะห์และแยกแยะความแตกต่างของเครือข่ายสมองและแสดงศักยภาพในการนำไปประยุกต์ใช้เป็นตัวบ่งชี้เบื้องต้นของความผิดปกติในเครือข่ายสมอง

คำสำคัญ: เครือข่ายสมอง, ทฤษฎีกราฟสเปกตรัม, Graph Laplacian, Eigenvalue, MRI

1. บทนำ

สมองของมนุษย์เป็นอวัยวะที่มีความซับซ้อน เพราะมีเซลล์ประสาทจำนวนมากที่เชื่อมโยงกันเป็นเครือข่าย การเชื่อมโยงเหล่านี้มีผลต่อการทำงานหลายอย่าง เช่น การคิด การจำ การเคลื่อนไหว รวมถึงอารมณ์ ถ้าสมองมีความผิดปกติในบางส่วนก็อาจจะส่งผลต่อการใช้ชีวิตประจำวัน การศึกษารูปแบบของเครือข่ายในสมองจึงเป็นสิ่งสำคัญโดยเฉพาะในการทำความเข้าใจโรคที่เกี่ยวข้องกับระบบประสาท เช่น โรคซึมเศร้าหรืออัลไซเมอร์ ปัจจุบันมีเทคโนโลยีที่สามารถถ่ายภาพสมองได้อย่างละเอียด เช่น MRI และ fMRI ซึ่งช่วยให้สามารถเห็นโครงสร้างและพฤติกรรมของสมองได้โดยไม่ต้องผ่าตัด ซึ่งเป็นแหล่งข้อมูลสำคัญที่สามารถนำไปวิเคราะห์และเปรียบเทียบคำตอบทางคณิตศาสตร์

หนึ่งในวิธีที่มีประสิทธิภาพในการวิเคราะห์โครงสร้างของสมองคือการใช้ “ทฤษฎีกราฟสเปกตรัม” (Spectral Graph Theory) ซึ่งเป็นแขนงหนึ่งของคณิตศาสตร์ การวิเคราะห์เชิงสเปกตรัมจึงช่วยให้สามารถเห็นภาพรวมของความเชื่อมโยงในสมอง และค้นหาความแตกต่างหรือความผิดปกติที่ซ่อนอยู่ในเครือข่ายนั้นได้อย่างเป็นระบบและมีหลักการ

ผู้จัดทำจึงมีเป้าหมายเพื่อศึกษาความแตกต่างของเครือข่ายสมองในกลุ่มคนที่แตกต่างกัน เช่น คนปกติและผู้ป่วยที่มีภาวะผิดปกติทางระบบประสาท โดยใช้หลักการทางคณิตศาสตร์ในการวิเคราะห์ข้อมูลจริงจากภาพสมอง นอกจากจะช่วยให้ฝึกทักษะการคิดเชิงวิเคราะห์และการประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์ในเรื่องที่ซับซ้อนแล้ว ยังเปิดโอกาสให้เกิดการเชื่อมโยงระหว่างศาสตร์ที่แตกต่างกัน นำไปสู่การทำความเข้าใจสมอง และสามารถวินิจฉัยโรคเบื้องต้นได้

2. วิธีการดำเนินงาน

2.1 เตรียมข้อมูลภาพสมองจากเทคนิค MRI ที่นำมาจากฐานข้อมูลสาธารณะที่เปิดเผยให้ใช้ได้เพื่อการวิจัยโดยไม่ละเมิดลิขสิทธิ์ แบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม

2.1.1 กลุ่มควบคุม (สมองปกติ) : สมองของอาสาสมัครที่มีสุขภาพสมบูรณ์

2.1.2 กลุ่มผู้ป่วย (สมองมีภาวะผิดปกติ) : สมองของอาสาสมัครที่ได้รับการวินิจฉัยว่ามีความผิดปกติ

2.2 แบ่งสมองออกเป็นบริเวณที่สนใจ (ROI)

โดยแต่ละ ROI จะถูกนิยามให้เป็น (node) ในเครือข่ายกราฟในสมอง โดยจะศึกษาส่วนของสมอง 4 ROI ดังนี้ Frontal lobe (สมองกลีบหน้า), Parietal lobe (สมองกลีบข้าง), Occipital lobe (สมองกลีบท้ายทอย) Temporal lobe (สมองกลีบขมับ)

2.3 หาค่าความสัมพันธ์ของสมองแต่ละ ROI

โดยการใช้สูตรการหาค่าความสัมพันธ์เพียร์สัน

$$r_{ij} = \frac{\sum (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\sum (x_1 - \bar{x}_1)^2} \sqrt{\sum (x_2 - \bar{x}_2)^2}}$$

2.4 สร้างเครือข่ายสมองโดยใช้เมทริกซ์การเชื่อมต่อ (Adjacency Matrix, A) ขนาด N×N

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{(edge) } i, j \\ 0 & \end{cases}$$

2.5 วิเคราะห์เครือข่ายสมองโดยใช้ข้อมูลจาก Adjacency Matrix (A) มาสร้าง Graph Laplacian (D) เพื่อศึกษาความเชื่อมโยงของเครือข่ายสมอง

$$L = D - A$$

โดย A คือ Adjacency Matrix

D คือ Diagonal Matrix ของ degree ของแต่ละโหนด ซึ่งนิยามว่า

$$D_{ii} = \sum_{j=1}^N A_{ij}$$

เมื่อนำ L มาวิเคราะห์จะได้ค่าลักษณะเฉพาะ
(Eigenvalues), (λ)

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

โดย $\lambda_1 = 0$ คือคุณสมบัติพื้นฐาน
 λ_2 คือค่าที่ใช้บ่งบอกความเชื่อมโยงโดยรวม
ของเครือข่าย

2.6 ค่าที่ได้จากการวิเคราะห์เชิงสเปกตรัมจะ
ถูกนำมาเปรียบเทียบระหว่าง

2.6.1 กลุ่มควบคุม (สมองปกติ) : เพื่อเป็น
Baseline ของโครงสร้างเครือข่าย

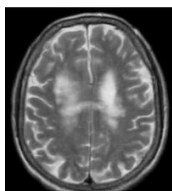
2.6.2 กลุ่มผู้ป่วย (สมองที่มีภาวะผิดปกติ) : เพื่อ
ตรวจสอบการเปลี่ยนแปลงหรือความบกพร่องของโหนด
และการเชื่อมต่อ

3. สรุปและอภิปรายผล

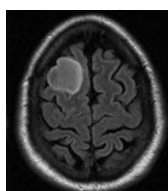
3.1 ในการศึกษาครั้งนี้มีผู้เข้าร่วมทั้งหมด
40 คน แบ่งเป็น 2 กลุ่ม ได้แก่

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน (คน)	อายุ เฉลี่ย (ปี)	เพศ (ชาย/ หญิง)
กลุ่มควบคุม (สมองปกติ)	20	28.5	10/10
กลุ่มผู้ป่วย (สมองมีภาวะผิดปกติ)	20	29.1	11/9

ตารางที่ 1 แสดงข้อมูลผู้เข้าร่วมทั้งหมด

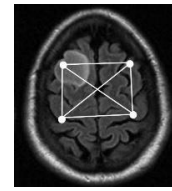
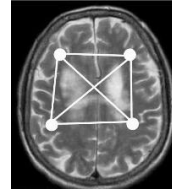


ภาพที่ 1 MRI สมองของกลุ่มควบคุม (สมองปกติ)



ภาพที่ 2 MRI สมองของกลุ่มผู้ป่วย (สมองมีภาวะผิดปกติ)

3.2 หาความสัมพันธ์ของสมองระหว่าง ROI
จากความเข้มของกราฟเส้นเชื่อมในรูปภาพ MRI



ภาพที่ 3 MRI สมองของกลุ่มควบคุม (สมองปกติ)
ที่ลากเส้นกราฟเชื่อมโยงระหว่างโหนด

ภาพที่ 4 MRI สมองของกลุ่มผู้ป่วย (สมองมีภาวะผิดปกติ)
ที่ลากเส้นกราฟเชื่อมโยงระหว่างโหนด

3.3 ประมวลผลภาพ MRI สมองเพื่อหาค่า
ความสัมพันธ์ของสมองแต่ละ ROI ของผู้เข้าร่วม

3.3.1 ประมวลผลค่า mean SI (5 frame) ของ
ภาพ MRI โดยใช้โปรแกรม imageJ (X)

3.3.2 หาค่าเฉลี่ยของสัญญาณ ROI_i ($\bar{X}$)

$$1) \bar{X}_1 = \frac{120.8+130.2+125.2+139.7+135.0}{5} = 130.18$$

$$2) \bar{X}_2 = \frac{100.0+112.0+104.5+118.0+113.0}{5} = 109.5$$

$$3) \bar{X}_3 = \frac{90.0+100.0+96.5+105.0+103.0}{5} = 95.1$$

$$4) \bar{X}_4 = \frac{95.0+100.0+96.5+105.0+103.0}{5} = 99.9$$

3.3.3 หาค่าความสัมพันธ์ของสมองแต่ละ ROI
จากสูตรการหาค่าความสัมพันธ์เพียร์สัน

$$1) r_{12} = \frac{\sum (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\sum (x_1 - \bar{x}_1)^2} \sqrt{\sum (x_2 - \bar{x}_2)^2}} = 0.98$$

$$2) r_{13} = \frac{\sum (x_1 - \bar{x}_1)(x_3 - \bar{x}_3)}{\sqrt{\sum (x_1 - \bar{x}_1)^2} \sqrt{\sum (x_3 - \bar{x}_3)^2}} = 0.96$$

$$3) r_{14} = \frac{\sum (x_1 - \bar{x}_1)(x_4 - \bar{x}_4)}{\sqrt{\sum (x_1 - \bar{x}_1)^2} \sqrt{\sum (x_4 - \bar{x}_4)^2}} = 0.96$$

$$4) r_{23} = \frac{\sum (x_2 - \bar{x}_2)(x_3 - \bar{x}_3)}{\sqrt{\sum (x_2 - \bar{x}_2)^2} \sqrt{\sum (x_3 - \bar{x}_3)^2}} = 0.91$$

$$5) r_{24} = \frac{\sum (x_2 - \bar{x}_2)(x_4 - \bar{x}_4)}{\sqrt{\sum (x_2 - \bar{x}_2)^2} \sqrt{\sum (x_4 - \bar{x}_4)^2}} = 0.94$$

$$6) r_{34} = \frac{\sum (x_3 - \bar{x}_3)(x_4 - \bar{x}_4)}{\sqrt{\sum (x_3 - \bar{x}_3)^2} \sqrt{\sum (x_4 - \bar{x}_4)^2}} = 1.00$$



3.4 สร้างเมทริกซ์การเชื่อมต่อ (Adjacency Matrix) ขนาด 4x4 จากการประมวลผลภาพ MRI ของผู้เข้าร่วม เพื่อแทนความสัมพันธ์ระหว่างโหนดสมอง

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.98 & 0.96 & 0.96 \\ 0.98 & 0 & 0.91 & 0.94 \\ 0.96 & 0.91 & 0 & 1.00 \\ 0.96 & 0.94 & 1.00 & 0 \end{bmatrix}$$

Adjacency Matrix แทนความสัมพันธ์ระหว่างโหนดของสมองกลุ่มควบคุม (สมองปกติ)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.82 & 0.60 & 0.65 \\ 0.82 & 0 & 0.75 & 0.78 \\ 0.60 & 0.75 & 0 & 0.88 \\ 0.65 & 0.78 & 0.88 & 0 \end{bmatrix}$$

Adjacency Matrix แทนความสัมพันธ์ระหว่างโหนดของสมองกลุ่มผู้ป่วย (สมองมีภาวะผิดปกติ)

3.5 วิเคราะห์ด้วย Spectral Graph Theory

3.5.1 คำนวณค่าดีกรีของสมองแต่ละโหนดโดยพิจารณาผลรวมของความเข้มของเส้นเชื่อมจากเมทริกซ์การเชื่อมต่อ

- 1) $D_{11} = \sum_{i=1}^N A_{ij} = 0.98 + 0.96 + 0.96 = 2.90$
- 2) $D_{22} = \sum_{i=1}^N A_{ij} = 0.98 + 0.91 + 0.94 = 2.83$
- 3) $D_{33} = \sum_{i=1}^N A_{ij} = 0.96 + 0.91 + 1.00 = 2.87$
- 4) $D_{44} = \sum_{i=1}^N A_{ij} = 0.96 + 0.94 + 1.00 = 2.90$

นำผลลัพธ์มาแทนใน Matrix จะได้

$$D = \begin{bmatrix} 2.90 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.83 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.87 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.90 \end{bmatrix}$$

3.5.2 Graph Laplacian $L = D - A$

$$L = \begin{bmatrix} 2.90 & -0.98 & -0.96 & -0.96 \\ -0.98 & 2.83 & -0.91 & -0.94 \\ -0.96 & -0.91 & 2.87 & -1.00 \\ -0.96 & -0.94 & -1.00 & 2.90 \end{bmatrix}$$

เมื่อนำ Adjacency Matrix มาสร้าง Graph Laplacian จะได้ผลลัพธ์จากการวิเคราะห์ ดังนี้

3.5.3 วิเคราะห์หาค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalues), (λ)

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

จะได้

- 1) กลุ่มควบคุม (สมองปกติ) : [3.03, 3.04, 3.05, 3.05, 3.05, 3.05, 3.06, 3.06, 3.06, 3.06, 3.07, 3.09, 3.09, 3.09, 3.09, 3.10, 3.10, 3.12, 3.12, 3.13]
- 2) กลุ่มผู้ป่วย (สมองมีภาวะผิดปกติ) : [2.03, 2.04, 2.05, 2.05, 2.06, 2.06, 2.07, 2.07, 2.07, 2.08, 2.09, 2.09, 2.09, 2.10, 2.11, 2.12, 2.14, 2.15, 2.17]

3.6 การตีความค่าเชิงสเปกตรัม

3.6.1 Largest Eigenvalue ค่าเฉลี่ยเชิงพีชคณิตสูงสุด

กลุ่มควบคุม (สมองปกติ) $\lambda = 3.13$

กลุ่มผู้ป่วย (สมองมีภาวะผิดปกติ) $\lambda = 2.17$

3.6.2 Algebraic Connectivity ความเชื่อมต่อเชิงพีชคณิต

กลุ่มควบคุม (สมองปกติ) $\lambda_2 = 3.03$

กลุ่มผู้ป่วย (สมองมีภาวะผิดปกติ) $\lambda_2 = 2.03$

3.6.3 การกระจายตัวของค่า Eigenvalues

กลุ่มควบคุม : 3.08 ± 0.03 มีค่าการกระจายกว้างกว่ากลุ่มผู้ป่วย แสดงความซับซ้อนของเครือข่ายสมอง

กลุ่มผู้ป่วย : 2.09 ± 0.04 มีค่าการกระจายแคบกว่ากลุ่มควบคุม แสดงโครงสร้างเครือข่ายบกพร่อง

3.7 การเปรียบเทียบระหว่างกลุ่ม

กลุ่ม ตัวอย่าง	ค่าเฉลี่ยของ Graph Laplacian	สรุปผล
กลุ่มควบคุม (สมองปกติ)	3.08	เครือข่ายสมองมีความ เชื่อมโยงสูงกว่ากลุ่มผู้ป่วย
กลุ่มผู้ป่วย (สมองมี ภาวะ ผิดปกติ)	2.09	เครือข่ายสมองมีการ เชื่อมโยงต่ำกว่ากลุ่มควบคุม บ่งชี้ความผิดปกติของสมอง

ตารางที่ 2 แสดงการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของ Graph Laplacian ของทั้ง 2 กลุ่มตัวอย่าง

4. สรุปและอภิปรายผล

4.1 อภิปรายผลการทดลอง

จากผลการทดลองพบว่า ค่า eigenvalue และค่า Algebraic Connectivity ของกลุ่มควบคุมมีค่าสูงกว่ากลุ่มผู้ป่วย ซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดของทฤษฎีกราฟสเปกตรัมที่ระบุว่า ค่า λ_2 เป็นตัวชี้วัดระดับความเชื่อมโยงโดยรวมของเครือข่าย หากมีค่าสูงแสดงว่าเครือข่ายมีการเชื่อมต่อที่แข็งแรงและไม่แตกออกเป็นกลุ่มย่อยง่าย เครือข่ายสมองของกลุ่มผู้ป่วยที่มีค่า λ_2 ต่ำกว่าอาจสะท้อนถึงการลดลงของการสื่อสารระหว่างบริเวณต่าง ๆ ของสมอง ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยที่เกี่ยวข้องที่รายงานว่า ความผิดปกติทางระบบประสาทมักสัมพันธ์กับการเปลี่ยนแปลงของโครงสร้างเครือข่ายสมองและความอ่อนแอของการเชื่อมโยงภายในเครือข่าย อย่างไรก็ตาม การศึกษานี้ยังมีข้อจำกัด เช่น การแบ่งสมองออกเป็นเพียง 4 ROI ซึ่งอาจยังไม่ครอบคลุมรายละเอียดเชิงลึกของโครงสร้างสมองทั้งหมด รวมถึงการใช้ค่าเฉลี่ยของ eigenvalue เป็นตัวแทนของเครือข่ายสมอง อาจทำให้สูญเสียข้อมูลเชิงโครงสร้างบางส่วนของแต่ละบุคคลไป

ถึงแม้จะมีข้อจำกัดดังกล่าว แต่ผลการทดลองยังคงแสดงให้เห็นแนวโน้มที่ชัดเจนของความแตกต่างระหว่างกลุ่มควบคุมและกลุ่มผู้ป่วย และยืนยันว่าการประยุกต์ใช้ทฤษฎีกราฟสเปกตรัมสามารถอธิบายลักษณะความเชื่อมโยงของสมองได้ในเชิงคณิตศาสตร์อย่างเป็นระบบ

4.2 สรุปผลการทดลอง

การเปรียบเทียบเครือข่ายสมองด้วยทฤษฎีกราฟสเปกตรัม มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการประยุกต์ใช้แนวคิดทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะทฤษฎีกราฟสเปกตรัม ในการวิเคราะห์โครงสร้างเครือข่ายสมองจากภาพถ่าย MRI และเปรียบเทียบลักษณะความเชื่อมโยงของสมองระหว่างกลุ่มควบคุม (สมองปกติ) และกลุ่มผู้ป่วย (สมองมีภาวะผิดปกติทางระบบประสาท) จากการวิเคราะห์ข้อมูลภาพ MRI ของผู้เข้าร่วมทั้งหมด 40 คน โดยแบ่งสมองออกเป็น 4 บริเวณที่สนใจ (ROI) และสร้างแบบจำลองเครือข่ายสมองในรูปแบบกราฟ พบว่า ค่าเฉลี่ยของค่า eigenvalue จากเมทริกซ์ลาปลาเซียของกลุ่มควบคุมมีค่าประมาณ 3.08 ซึ่งสูงกว่ากลุ่มผู้ป่วยที่มีค่าเฉลี่ยประมาณ 2.0 นอกจากนี้ ค่า Algebraic Connectivity (λ_2) ของกลุ่มควบคุมมีค่าสูงกว่ากลุ่มผู้ป่วย แสดงให้เห็นว่าเครือข่ายสมองของบุคคลปกติมีความเชื่อมโยงที่แน่นหนาและซับซ้อนมากกว่า ในขณะที่เครือข่ายสมองของกลุ่มผู้ป่วยมีแนวโน้มของการเชื่อมต่อที่อ่อนแอหรือบกพร่อง

ข้อเสนอแนะ

ในการศึกษาครั้งต่อไปควรเพิ่มจำนวนบริเวณที่สนใจ (ROI) เพื่อให้การวิเคราะห์โครงสร้างเครือข่ายสมองมีความละเอียดและแม่นยำมากขึ้น ควรศึกษาคุณสมบัติเชิงสเปกตรัมอื่น ๆ ของกราฟ เช่น Eigenvector หรือ Normalized Laplacian เพื่อขยายมุมมองในการวิเคราะห์เครือข่ายสมอง สามารถนำวิธีการวิเคราะห์นี้ไปประยุกต์ใช้กับข้อมูลสมองประเภทอื่น เช่น fMRI หรือ DTI เพื่อเปรียบเทียบผลลัพธ์ของโครงสร้างและการทำงานของสมองในเทคนิคที่ต่างกัน

กิตติกรรมประกาศ

โครงการงานเรื่องนี้ประกอบด้วยการทำงานหลายขั้นตอน นับตั้งแต่การศึกษาหาข้อมูล การทดลอง การวิเคราะห์ การจัดทำโครงการเป็นรูปเล่ม จนกระทั่งโครงการนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ตลอดระยะเวลาดังกล่าวคณะผู้จัดทำโครงการได้รับความช่วยเหลือและคำแนะนำในด้านต่าง ๆ ตลอดจนได้รับกำลังใจของบุคคลหลายท่าน คณะผู้จัดทำตระหนักและซาบซึ้งในความกรุณาจากทุก ๆ ท่านเป็นอย่างยิ่ง ณ โอกาสนี้ ขอขอบคุณทุก ๆ ท่าน ดังนี้

ขอขอบคุณผู้อำนวยการโรงเรียนวิทยาศาสตร์จุฬาภรณราชวิทยาลัย ลพบุรี ที่ให้ความอนุเคราะห์และให้ความช่วยเหลือในด้านต่าง ๆ

ขอขอบคุณครูที่ปรึกษาและครูในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย ลพบุรี ทุกคนที่คอยดูแลเอาใจใส่และให้คำปรึกษาอย่างดี

ท้ายที่สุดขอกราบขอบพระคุณคุณพ่อและคุณแม่ผู้เป็นที่รัก ผู้ให้กำลังใจและให้โอกาสการศึกษาอันมีค่า

เอกสารอ้างอิง

Data Investigator Team. (2568). คำสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เพียร์สัน (Pearson's Correlation Coefficient) คืออะไร. กรุงเทพมหานคร. Data Investigator. สืบค้นเมื่อ 15 มิถุนายน 2568, จาก <https://www.datainvestigatorth.com/post/pearson-correlation-coefficient>

student.chula.ac.th. (2568). MRI คืออะไร. กรุงเทพมหานคร. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. สืบค้นเมื่อ 15 มิถุนายน 2568, จาก <http://www.student.chula.ac.th/~59370434/page2.html>

Achard, S., Salvador, R., Whitcher, B., Suckling, J., & Bullmore, E. (2006). The Laplacian Spectrum of Neural Networks. Lausanne, Switzerland. Frontiers Media SA. สืบค้นเมื่อ 15 มิถุนายน 2568, จาก

<https://www.frontiersin.org/journals/computationalneuroscience/articles/10.3389/neuro.10.007.2006/full>

Rehák Bučková, B., & Mareš, J. (2024). Human Brain Structural Connectivity Matrices—Ready for Modelling. London, United Kingdom. Springer Nature. สืบค้นเมื่อ 15 มิถุนายน 2568, จาก

<https://www.nature.com/articles/s41597-024-03758-7>

Becker, C. O., Pequito, S., Pappas, G. J., Miller, M. B., Grafton, S. T., Bassett, D. S., & Preciado, V. M. (2018). Spectral Mapping of Brain

Functional Connectivity from Diffusion Imaging. London, United Kingdom. Springer Nature. สืบค้นเมื่อ 15 มิถุนายน 2568, จาก

<https://www.nature.com/articles/s41598-018-21432-2>

JYY, & YKK. (2024). Graph Theory Approach for the Structural-Functional Brain Connectome of Depression. Amsterdam, Netherlands. Elsevier. สืบค้นเมื่อ 15 มิถุนายน 2568, จาก

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2666956024000036>

Verma, P., Nagarajan, S., & Raj, A. (2024). Spectral Graph Theory of Brain Oscillations—Revisited and Improved. Bethesda, MD, USA. U.S. National Library of Medicine. สืบค้นเมื่อ 15 มิถุนายน 2568, จาก

<https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC11258254/>